CLAVIUS, PITISCUS Y LA PRIMERA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL COSENO PARA LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO CUALQUIERA

Clavius, Pitiscus and the first proof of the cosine theorem for the sides of any spherical triangle

Joaquim Guerola Olivares
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

La resolución de triángulos esféricos fue una herramienta esencial para solventar los problemas astronómicos identificados por los matemáticos antiguos. A partir del de Menelao se fueron enunciando y demostrando teoremas que facilitaban su resolución en un proceso que duró centenares de años. En su desarrollo tuvieron un papel relevante los matemáticos islámicos a lo largo de la Edad Media.

Fue Regiomontanus quien introdujo en Occidente, de una forma sistemática, el conocimiento relacionado con la resolución de triángulos esféricos que se tenía hasta entonces. Entre los resultados que presenta, se encuentra el teorema del coseno para los lados de un triángulo esférico cualquiera. Sin embargo, ni en él ni en autores anteriores conocidos figura su demostración.

En el siglo XVI hubo muchos matemáticos que se ocuparon de la resolución de triángulos planos y esféricos, deduciendo nuevos resultados que iban completando y perfeccionando su cuerpo doctrinal. Entre ellos se encuentra Clavius, quien procura presentar la demostración de todos los enunciados que expone, incluyendo los relacionados con la resolución de triángulos; uno de esos es el teorema del coseno, la demostración del cual procuró a lo largo de muchos años, sin conseguirlo.

Fue el matemático silesio Bartolomaeus Pitiscus, introductor de la palabra trigonometría, quien hizo la primera demostración del teorema presentándola, por primera vez. en 1595.

En este trabajo se muestra, de forma concisa, el camino recorrido por el enunciado del teorema y se presenta la demostración de Pitiscus.

Abstract

The resolution of spherical triangles was an essential tool for solving astronomical problems identified by ancient mathematicians. Over hundreds of years, the resolution of such problems was facilitated by

Recibido: 16/10/2021 — Aceptado: 04/02/2022
https://doi.org/10.47101/llull.2022.45.91.guerola

the theorems that were being enunciated and proven, of which Menelao's theorem was the first. Islamic mathematicians played an important role in their development throughout the Middle Ages.

It was Regiomontanus who structured and introduced in the West all the knowledge related to the resolution of spherical triangles that existed until then. Among the results he presents is the cosine theorem for the sides of any spherical triangle. However, neither him nor any previous known author provide its proof.

In the sixteenth century there were many mathematicians who dealt with the resolution of plane and spherical triangles and deduced new results that contributed to completing and perfecting the body of doctrine of trigonometry. One of them is Clavius, who tries to present the proof of all the statements he exposes, including those related to the resolution of triangles; among these is the cosine theorem, which he tried to prove for many years, without succeeding.

It was the Silesian mathematician Bartolomaeus Pitiscus, introducer of the word trigonometry, who presented for the first time the proof of the theorem in 1595.

In this work, the evolution of the cosine theorem over the Middle Ages is concisely shown and its proof by Pitiscus is presented.

Palabras clave: Pitiscus, Clavius, trigonometría esférica, teorema del coseno.

Key words: Pitiscus, Clavius, spherical trigonometry, spherical Law of Cosinus.

1. Introducción

La trigonometría se originó cuando los antiguos matemáticos griegos e hindúes trataron de abordar problemas astronómicos que requerían la resolución de triángulos esféricos. Al principio lo consiguieron utilizando únicamente métodos gráficos basados en teoremas geométricos. Durante siglos permaneció unida a la astronomía, pero progresivamente fue incorporando el cálculo numérico y el álgebra a través de teoremas, sistematizándose su cuerpo doctrinal hasta llegar a configurarse como una disciplina matemática independiente [Samsó 2011, p. 139]. Esta independencia se manifestó, primeramente, en la obra *Incógnitas de los arcos de la esfera* de Ibn Muᶜā<u>d</u>h al-Jayyāni (*ca*. 989–*ca*. 1079), alcanzando la completa madurez con los trabajos de Jean-Baptiste-Joseph Fourier sobre las series trigonométricas [Fourier, 1807].

Uno de los objetivos que, de forma natural, abordaron los matemáticos medievales, árabes primero, y occidentales después, fue el de deducir y exponer las demostraciones de los diversos teoremas que configuran la resolución de triángulos, derivados de los conocimientos que habían recibido de la matemática griega antigua y de autores anteriores, tarea que se realizó a lo largo de mucho tiempo. De alguno de ellos, a pesar de que fue conocido y aplicado, su demostración no apareció hasta cientos de años después. Este es el caso del teorema del coseno para los lados de un triángulo esférico cualquiera, cuya demostración se elaboró y publicó al final del siglo XVI. Su enunciado es el siguiente:

En cada triángulo esférico ABC de lados respectivos a, b y c, se cumple la relación:

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$ [1]

fórmula que permite resolver, de forma directa, los triángulos esféricos en los dos casos siguientes:

— conocidos dos lados a, b y el ángulo comprendido C.

— conocidos los tres lados a, b y c.

Hasta la aparición del cálculo logarítmico en 1614, las multiplicaciones y divisiones a realizar en la resolución de un triángulo eran muy largas y farragosas por el número de decimales que había que tener presente, lo cual seguramente provocó que no urgiera elaborar y presentar la demostración de este teorema ya que su aplicación requiere realizar dos multiplicaciones, una de dos factores y otra de tres. A pesar de ello fue utilizado en diversas ocasiones. Se desconoce, en cualquier caso, cómo apareció y quién lo enunció por primera vez.

2. El teorema del coseno hasta Clavius

Dos teoremas fundamentan todo el desarrollo de la resolución de triángulos: el de Menelao,[2] al que después se le daría el nombre de la regla de las seis cantidades y también teorema de las transversales o figura transversal, que aparece en sus *Esféricas* (3, 2) y es recogido en el *Almagesto* (I, 9), y el teorema de Ptolomeo.[3]

Su aplicación directa a la resolución de triángulos no era fácil por lo que, a partir de las necesidades que se fueron presentando, fueron apareciendo teoremas y fórmulas derivadas de esos teoremas que facilitaron los cálculos a realizar.

Resolver un triángulo esférico era una cuestión decisiva y esencial en el mundo islámico medieval para solventar problemas astronómicos, entre los que destacan el de la determinación de la alquibla, es decir, el de la dirección hacia la Kaaba de la Gran Mezquita de La Meca que debían conocer los musulmanes a la hora de realizar sus oraciones diarias, y también la de las mezquitas a la hora de ser construidas de acuerdo con las prescripciones coránicas, en especial cuando la ubicación estaba muy alejada de La Meca.

De esta forma, el teorema del coseno fue usado por los primeros matemáticos islámicos para resolver determinados problemas, pero ninguno de ellos explicita su origen. A su

1. El teorema del coseno para los ángulos afirma que: $\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$.
2. Si α, β, γ, δ son arcos de círculos máximos menores de 180° se cumple que: $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\gamma/\operatorname{sen} c$, $\operatorname{sen} d'/\operatorname{sen}\delta$ y $\operatorname{sen} c'/\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a'/\operatorname{sen} a \times \operatorname{sen}\beta/\operatorname{sen} b'$, siendo $\alpha = a+a'$, $\beta = b+b'$, $\gamma = c+c'$, $\delta = d+d'$. Ptolomeo en lugar de sen α escribe ½ cuerda (2α), usando la trigonometría de cuerdas.
3. En un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia, el producto de sus diagonales, AC·BD, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, AB · CD + AD · BC. Ptolomeo lo usó para calcular la cuerda de la suma y la diferencia de dos ángulos.

enunciado se puede llegar usando métodos hindúes o ptolemaicos [Rosenfeld, 1993, p. 305-306]. Al-Jwārizmī (*ca.*170/780 - *ca.*240/850) usa ese teorema, sin demostrarlo, cuando calcula el azimut α del Sol en función de su altitud h, la latitud terrestre ϕ, y del arco ψ medido sobre el horizonte entre la dirección del este y del punto del horizonte por el que sale el Sol, a través de la fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{\text{sen}\,\psi - \tan\phi\,\text{sen}\,h}{\cos h}$$

que equivale al teorema del coseno. Unas décadas más tarde, al-Battani (m. 929), autor de las *Tablas Astronómicas*, resolvería un problema similar [Van Brummelen 2009, p. 167-168].

El *Calendario de Córdoba* (*ca*. 960), elaborado por ᶜArīb b. Saᶜīd (m. 980) y por Rabīᶜ b. Zayd [Samsó 2011, p. 71], describe dos sistemas astronómicos. Uno de ellos es el llamado al-Mumtahan que ya había utilizado al-Battani en sus tablas astronómicas siguiendo un método ptolemaico. De acuerdo con la versión latina de Gerardo de Cremona, al-Mumtahan significa "et est equatio Albateni", lo cual implica que los autores del *Calendario* conocían el teorema del coseno para un triángulo esférico en general [Villuendas, 1979, p. XV].

Abu-l-Wafa (940-980) resolvió toda clase de triángulos esféricos sin usar el teorema del coseno en general, incluyendo la demostración del teorema de los senos para triángulos esféricos cualesquiera.[4]

De entre todos los enunciados derivados de los teoremas de Menelao y Ptolomeo, únicamente el teorema de los senos fue enunciado y demostrado para un triángulo cualquiera. Los otros teoremas fueron únicamente enunciados y demostrados para triángulos esféricos rectángulos: la regla de las cuatro cantidades,[5] el teorema de Geber,[6] el teorema del coseno,[7] el teorema de las tangentes[8] y varios corolarios [Samsó, 2011]. Todos ellos aparecen en diversas obras, entre ellas la ya citada de Ibn Muᶜāḏ, quien los deduce a partir del teorema de Menelao que enuncia sin demostrar. Sin embargo, no aparece citado el teorema del coseno para triángulos esféricos cualesquiera.

No se conoce traducción latina alguna de la obra de Ibn Muᶜāḏ. Influyó [Millás, 1960], al menos de forma indirecta, en el *Islāh al-Mayistī* de Ŷābir b. Alfal (latinizado Geber) (m. 1145), obra que sí fue traducida al latín por Gerardo de Cremona. Aflah sistematizó la resolución de todos los triángulos con la trigonometría ptolemaica de cuerdas y resolvió, de forma correcta, los triángulos esféricos mediante la regla de las seis cantidades. Sin embargo, cree que el teorema de Ptolomeo es demasiado engorroso y lo reemplaza por la regla de las

4. Afirma que en un triángulo esférico ABC cualquiera se verifica que sen a/sen A = sen b / sen B = sen c/sen C
5. Dados los triángulos esféricos ABG, B = 90°, y AZD, Z = 90°, B y Z, y G y D situados en el mismo círculo máximo respectivamente, entonces: sen AG/sen GB = sen AD/sen DZ'.
6. senA/senB = cos G/cos g.
7. cos b = cos a cos g.
8. sen a/tanG = tan g/senB, y sen g/tanA = tan a/senB.

cuatro cantidades, que demuestra.[9] Este texto de Aflah influyó en el *Tratado del Cuadrante Sennero* (*ca*. 1280) de Rabí Cag Cohen, en el que se usan los teoremas del seno, de Geber, y del coseno para triángulos rectángulos, pero no para triángulos cualesquiera [MARTÍNEZ, 1984].

La sistematización definitiva de la resolución de triángulos esféricos queda recogida en el libro V del *Tratado del Cuadrilátero* del matemático persa Nasir al-Din al-Tūsī (1201-1274). A partir del teorema de Menelao para triángulos esféricos presenta dos teoremas: el de los senos y el de las tangentes, acompañando los enunciados de diversas demostraciones de ambos. A partir de ellos deduce varios corolarios para un triángulo esférico rectángulo. Entre ellos destacan el teorema del coseno y el de Geber. Al-Tūsī resuelve todos los triángulos esféricos utilizando aquellos dos teoremas. Sin embargo, ni cita ni emplea el teorema del coseno en general; aplica el método del triángulo polar en el caso de que sean conocidos los tres ángulos, método que ya había utilizado Abu Nasr Mansur (960-1036). Al-Tūsī atribuyó a al-Nayirizi (*ca.* 865- 922) y al-Khazin (900-971) el primero de estos teoremas citados [VAN BRUMMELEN, 2009, p. 190].

En el contexto europeo, la obra de Johannes Müller (REGIOMONTANUS) (1436-1476) *De triangulis omnimodis libri quinque,* escrita en 1464 y publicada en 1533, constituye la primera exposición clara de la resolución de triángulos. Probablemente fue influenciada, de forma directa, por las *Tablas Toledanas* de Azarquiel y el *Islāh al-Mayistī* de Aflah y, por tanto, de forma indirecta por la obra de Ibn Muᶜāḏ[Samsó 2011, p. 144]. Es en esta obra de Regiomontanus que aparece por vez primera, de forma explícita, el enunciado del teorema del coseno para triángulos esféricos cualesquiera. Es el teorema II del Libro V. Peurbach (1423-1461), su maestro, lo utilizó para solucionar el problema de calcular la altura del Sol, pero nunca lo enunció de forma independiente. Se ha especulado que Regiomontanus no lo tomara de él, pese a que lo cita como fuente, sino de un problema astronómico resuelto por Al-Battani en *De motu stellarum* [VAN BRUMMELEN, 2009, p. 260].

Lo enuncia así sin acompañar demostración:

> *In omni triangulo sphaerali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus uersi anguli cuiuslibet ad differentia duorum sinuum uerforum, quorum unus est lateris eum angulum subtendentis: alius uero differentiae duorum arcun ipsi Angulo circumiacentium est tanquem proportio quadati sinus recti totius ad id, quo sub sinibus arcuum dicto Angulo circumpositorum continetur rectangulum.*

[En todo triángulo construido a partir de arcos de círculos, la razón del seno verso de cualquier ángulo a la diferencia de dos senos versos, de los cuales uno es [el seno versus] del lado que subtiende este ángulo mientras que el otro es el [seno verso] de la diferencia de los dos arcos que forman el ángulo, es como la razón del cuadrado de todo el seno recto al producto rectangular de los senos de los arcos colocados alrededor del ángulo mencionado]

9. Clavius afirma: "aportaré también los libros de Regiomontanus, de Gebro Arabe Hispalense, sobre triángulos esféricos, o nuestros triángulos esféricos que con Teodosio y con el tratado y tabla de los senos aparecerán reunidos en breve en un volumen muy necesario para toda astronomía…" [CLAVIUS, 1581, prólogo].

Simbólicamente se escribe así:

$$\frac{\text{sen ver A}}{\text{sen ver a-enver (b-c)}} = \frac{1}{\text{sen b sen C}}$$

Thomas Finck (1561-1656) lo enunció en su obra *Geometria rotundi libri XIIII*, publicada en 1583, en la forma que lo hizo Regiomontanus y lo aplicó por primera vez para resolver un triángulo del que son conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos [Zeller, 1944, p. 88].

El enunciado del teorema no aparece, sin embargo, en la obra de Maurice Bressieu (1546-1617) y tampoco en la de François Viète (1541-1603). Ambos resuelven los triángulos esféricos no rectángulos a la manera tradicional, descomponiéndolos en dos de rectángulos.

3. Clavius y la resolución de triángulos

La obra del matemático jesuita Christopher Clavius (1538-1612) relacionada con la resolución de triángulos planos y esféricos, aplicando las funciones trigonométricas, se publicó en 1586. Años antes, en 1570, había publicado *In Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius*, en 1574 había visto la luz de *Euclidis elementorvm libri XV. Accessit XVI*, en 1581 *Gnomonices Libris VIII* y, en 1583, su *Epitome Arithmeticae practicae*.

En efecto, en ese año de 1586[10] Clavius publicó el libro *Theodossi Tripolitae Sphaericorum libri III*. En la primera parte incluye la obra *Las Esféricas* de Teodosio [Teodosio de Bitinia (ca. 160 a.C.- *ca.* 90 a.C.], un conjunto de tres libros en los que se describen las propiedades de la esfera. La segunda parte lleva por título *Sinus, Vel Semisses Rectarvm in circulo subtensarum: Lineae tangentes, atque secantes.* En ella introduce un conjunto de definiciones básicas (ángulos complementarios, cuerda de un círculo), las que giran alrededor del seno (*rectus, versus, complementi, totus*) y también un conjunto de teoremas y proposiciones explicativas que le permiten finalmente construir la tabla de los senos. Afirma que ha utilizado, entre otras obras astronómicas y geométricas, el *Almagesto* de Ptolomeo, su propia obra *Gnomonica* y las

10. Clavius tenía escrita esta obra, al menos parcialmente, desde hacía unos años. La cita en su Gnomonica, [Clavius 1581, p. 550-555, 558]. En concreto menciona la proposición 41, que trata del teorema de los senos para triángulos esféricos cualesquiera [Clavius, 1586, p. 408-411] y la 43, que trata del teorema del coseno para triángulos esféricos rectángulos, enunciado para los senos de los complementarios de los lados [Clavius, 1586, p. 417-419]. Mary Claudia Zeller [1944] afirma que Clavius estaba familiarizado con la obra Geometria rotundi libri XIIII, de Thomas Finck, publicada en Basilea en 1583, a pesar de que esta aparece dos años más tarde del uso que Clavius hace de su propia obra trigonométrica. También con la de Francis Vieta, *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus,* en cuatro partes, dos de las cuales fueron publicados en 1579, el *Canon mathematicus,* que contiene las tablas de las funciones trigonométricas, y la *Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis,* que ofrece las fórmulas para la resolución de triángulos planos y esféricos, con un gran cantidad de resultados numéricos; las otras dos partes, dedicadas a la astronomía, no fueron publicadas.

de Peuerbach, Regiomontanus y Apiano [Clavius, 1586, p. 99-100]. Finaliza esta parte de su obra con la tabla de los senos y las de la secante y la tangente, después de definirlas.

La tercera parte queda dedicada a la resolución de triángulos planos, *Triangula Rectilinea*. En la introducción, Clavius afirma que se pueden resolver todos los triángulos, tanto planos como esféricos, usando el seno, la tangente y la secante. Cita el *Epítome* de Regiomontanus sobre el *Almagesto*, la obra de Copérnico *Sobre las revoluciones celestes* y otros escritos de astrónomos como *De Triangulis Omnimodis* de Regiomontanus, el cual sigue a "Geber el árabe sevillano", a Copérnico, cuya obra califica de "breve y un poco oscura",[11] y a su propia *Gnomonica.* Para aquellos que quieran ampliar conocimientos sobre la resolución de los triángulos planos, les recomienda leer a Regiomontanus.[12] La cuarta parte, llamada *Triangula Sphaerica*, la dedica a la resolución de los triángulos esféricos. Y a quien quiera profundizar más sobre este tipo de triángulos, lo remite a Menelao y Maurolico.

Clavius ya había usado la trigonometría plana y esférica cinco años antes para calcular numéricamente los seis ángulos que aparecen en la obra de Ptolomeo, el *Analemma*. Esos cálculos figuran en el capítulo VI de su *Gnomonica* publicada en 1581 [Guerola, 2018]. Cuando en esta obra resuelve triángulos con la trigonometría plana no cita ningún texto de referencia, aunque en la introducción había mencionado a Regiomontanus, Geber, Menelao y Maurolico. En todos los cálculos utiliza únicamente el seno de un ángulo y no emplea el teorema del coseno para resolver los triángulos, lo cual le hubiera facilitado el cálculo de los

11. Clavius, en su obra sobre resolución de triángulos, señala un error en la obra de Copérnico, error que ya había sido comentado por Regiomontanus. Copérnico enuncia el problema siguiente: "en cualquier triángulo [esférico] que tenga un ángulo recto, si se da otro ángulo y cualquier lado, se dará el ángulo restante y los lados restantes" [Zeller, 1944, p. 49-50]. Clavius afirma que el enunciado correcto es: "en un triángulo esférico recto, si uno de los ángulos que no es un ángulo recto está dado con un arco adyacente al ángulo recto, entonces se pueden determinar el otro ángulo oblicuo y los dos lados restantes" [Clavius, 1586, p. 417]. Regiomontanus, al enunciar en su libro IV la proposición 27, lo había señalado así: "En un triángulo rectángulo, si se conoce un lado y cualquier ángulo que no sea recto, determinar el ángulo restante y los lados restantes".
12. "La doctrina de los triángulos, tanto rectilíneos como esféricos, consiste en el uso de los senos y de las líneas tangentes y secantes; ya que todos los astrónomos, al investigar o explicar los movimientos celestes, indagan en triángulos con la ayuda de los senos y de las líneas tangentes y secantes, sean los lados a partir de los ángulos conocidos, sea también los ángulos a partir de los lados conocidos. Lo cual resulta evidente en el Epítome de Ioannes [Regiomontanus] sobre el Almagesto, o Gran Construcción de Ptolomeo, en la obra de Copérnico sobre las revoluciones celestes, y en otros escritos de astrónomos. Por lo cual, habiendo concluido el tratado de los senos y de las líneas tangentes y secantes, nos pide la lógica que, con todas nuestras fuerzas, expongamos esta ciencia de los triángulos, difusamente explicada por Joannes Regiom[ontanus] en cinco libros, y enseñada por Geber el árabe sevillano, e incluso por Nicolás Copérnico, ciertamente en forma breve, pero de manera un poco oscura; dado que su utilidad es increíble, tanto para entender o investigar correctamente todos los campos matemáticos, como especialmente los movimientos celestes y los campos que dependen de ellos, según ya hemos dicho, e incluso puede en parte deducirse también de nuestra Gnomonica, en la que muchas cosas relativas a los relojes las hemos demostrado a partir de triángulos. Comenzaremos, pues, con los triángulos rectilíneos, como más fáciles, y de ellos solo demostraremos aquello que juzguemos ser necesario para comprender correctamente los campos astronómicos y geométricos. Quien desee más, lea a Menelao y Maurolico sobre triángulos esféricos, y sobre rectilíneos, Ioannes Regiomontano. Pero, antes de nada, ha de explicarse a qué ha de tomarse la cantidad de los ángulos rectilíneos" [Clavius, 1586, p. 295-296].

seis ángulos ptolemaicos. Esta restricción, de la que Clavius fue consciente, le obliga a resolverlos en un orden determinado.

Clavius no demuestra la fórmula de las tangentes, pero sí la utiliza para resolver el caso del triángulo plano no rectángulo cuando son conocidos dos lados y el ángulo comprendido. Este hecho, posiblemente, se deba a que no modificó la obra que ya tenía manuscrita antes de 1583, fecha de la publicación de la demostración de este teorema por parte de Finck.[13] En cambio, demuestra cuatro teoremas, correspondiendo el primero al teorema de los senos: lo expone para los triángulos rectángulos y después para un triángulo en general, sea acutángulo u obtusángulo [Clavius, 1586, p. 299-320]. Ninguno de ellos corresponde al teorema del coseno para triángulos planos. Tampoco usa ni demuestra ese teorema en el caso que sean dados los tres lados; para resolverlo, de nuevo, subdivide el triángulo en dos de rectángulos.

Cuando resuelve en su *Gnomonica* los triángulos esféricos para calcular los citados seis ángulos ptolemaicos, explicita los teoremas y las fuentes que utiliza:

- El teorema de los senos para triángulos esféricos cualesquiera, lo utiliza para calcular tres de los ángulos ptolemaicos. Clavius señala que este teorema se encuentra en la proposición 17 del libro 4º de *De Triangulis* de Regiomontanus, en la proposición 13 del Libro I de la *Astronomía* de Geber,[14] y en su proposición 41, que es la que figurará con ese mismo número de orden en su *Triangula Spherica*, la cuarta parte de su obra trigonométrica publicada el 1586.
- El teorema del coseno enunciado con los senos de los ángulos complementarios, para los lados de un triángulo esférico rectángulo, lo utiliza para calcular los otros tres ángulos del *Analemma*. Clavius afirma que el enunciado se encuentra en la proposición 19 del libro 4º de Regiomontano, la proposición 15 del Libro I de la *Astronomia* de Geber, y su proposición 43 que aparecerá tal cual en su *Triangula Spherica*.

No utilizó, sin embargo, su proposición 42 que corresponde al teorema de Geber para triángulos esféricos rectángulos,[15] que también enuncia y demuestra para los senos de los ángulos complementarios.

Además de este teorema, en su *Triangula Sphaerica,* Clavius realiza la demostración del teorema de los senos (proposición 41, p. 408-413), el teorema del coseno para triángulos rectángulos ($B = 90°$, $\cos b = \cos c \cos a$) (p. 417-422), y diversos teoremas (proposiciones

13. Mary Claudia Zeller [1944] afirma que la demostración del teorema de las tangentes aparece en la Geometria rotundi libri XIIII de Thomas Finck publicada en 1583 [Zeller, 1944, p. 88]. De nuevo queda cuestionada su afirmación de que Clavius copió a Finck. Todo lo cual parece indicar que Clavius, en ese año, ya tenía escrita su obra, al menos en parte, sobre la trigonometría plana.
14. Esta obra de Aflah tiene nueve libros; se publicó en Núremberg en 1534, formando parte de la obra Apianus, Petrus et al. *Instrumentum primi mobilis/ a Petro Apiano/. Accedunt iis Gebri Filii Affla hispalensis ibri IX de astronomía / per Girardu[m] Cremonensem latinitate donati...*
15. El teorema de Geber es un caso particular del teorema del coseno para los ángulos de un triángulo ABC cualquiera: $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$; si $B = 90°$, entonces $\cos A = \sin C \cos a$.

44-56). Las proposiciones 57-61 están vinculadas a cuestiones relacionadas con la resolución de triángulos en general.

En el problema 3 (proposición 62) aborda el caso que sean conocidos los tres ángulos, la cual solventa descomponiendo el triángulo en dos de rectángulos.

En el problema 4 (proposición 63), resuelve el caso del triángulo cuando son conocidos los tres lados. De nuevo subdivide el triángulo en dos de rectángulos. La resolución que presenta, larga y farragosa, se basa en las proposiciones 41 y 43 citadas [CLAVIUS, 1586, p. 460-464]. Al final, consciente de la dificultad que tiene este método, afirma que la solución se obtendría de forma mucho más breve si se utilizase el teorema del coseno para triángulos esféricos cualesquiera, que enuncia, pero no demuestra. El hecho de que lo presente únicamente como un método práctico breve, indica que no conocía la demostración. El enunciado que ofrece Clavius del teorema del coseno es similar al que había publicado Regiomontanus:

> *Aliter, & multo breuius. Sint rursum dati tres arcus trianguli ABC, arcusq; AB, AC, angulum A, inquirendum continentes, inaequales. Quoniam igitur est, vt sinus totus ad quantitatem quartam proportionalem sinui toti, & duobus sinubus arcuum AB, AC, inaequalium, ita sinus versus anguli A, ad differentiam inter sinum versum arcus BC, angulo A, oppositi, &_sinum versum arcus, quo se mutuo excedunt arcus inaequales AB, AC.*

4. CLAVIUS Y SU DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL COSENO PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Como se ha dicho, Clavius intenta presentar la demostración de todas las proposiciones que utiliza en la resolución de triángulos esféricos, entre ellas la demostración del teorema del coseno en el caso particular de que el triángulo sea rectángulo (proposición 42), que citó y utilizó en muchas ocasiones, incluso antes de ser publicada su obra trigonométrica.

Presentado aquí de forma simbólica, el enunciado de Clavius del teorema del coseno para triángulos rectángulos es el siguiente: en un triángulo ABC, rectángulo en B, se cumple que:

$$\frac{\text{sinus C}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus}(90^\circ\text{ -A})}{\text{sinus}(90^\circ\text{-BC})}\ \left[\text{sen C} = \frac{\cos A}{\cos a}\right]$$

La demostración la hace distinguiendo cuatro casos:

Caso 1.- A y C son ángulos agudos.

Se prolongan los lados AB = C y AC = B hasta completar sendos cuadrantes AD y AE, respectivamente. Igualmente se prolongan BC y DE. Sea F el punto de intersección. Entonces D = 90° y E = 90°.

Se considera el triángulo CEF. Aplicando el teorema de los senos se cumple que:

$$\frac{\text{sinus CF}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus EF}}{\text{sinus ECF}}$$

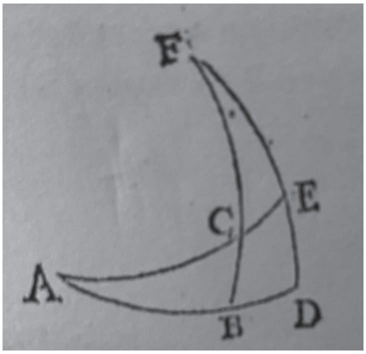


Figura 1. [Clavius, 1586, p. 414]

Como que los ángulos ECF y ACF son iguales (opuestos por el vértice), e invirtiendo la proporción, se cumple:

$$\frac{\text{sinus ACB}}{\text{sinus EF}} = \frac{\text{sinus totum}}{\text{sinus CF}}$$

Intercambiando los medios:

$$\frac{\text{sinus ACB}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus EF}}{\text{sinus CF}}$$

Como que ACB = C, resulta que $\frac{\text{sinus C}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus(90°-A)}}{\text{sinus(90°-CB)}}$, como se quería demostrar.

Caso 2.- A es obtuso y c es agudo.

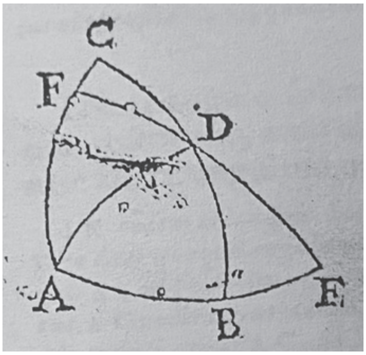


Figura 2. [Clavius, 1586, p. 414]

Se construye el ángulo BAD de manera que sea recto, y sobre el círculo máximo que pasa por A y B se construye E de manera que el arco AE sea de 90^0. Se considera el círculo máximo que pasa por E y D. Corta al lado AC en el punto F. Como que los ángulos DAB y DBA son rectos, los arcos AD y BD también lo son. Como que DAE es recto, el arco DE también lo es.

$$AF = 90° \text{ y } DE = 90° - EF,\ CD = 90° - BC \text{ y } F = 90°$$

En el triángulo CDF el ángulo F es recto. Por tanto, aplicando el teorema de los senos resulta que:

$$\frac{\text{sinus CD}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus DF}}{\text{sinus C}}$$

Y como que DF = 90° – BAC = 90°–A, entonces se cumple que:

$$\frac{\text{sinus DF}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus DF}}{\text{sinus CD}} = \frac{\text{sinus}(90° \text{ -A})}{\text{sinus}(90°\text{-BC})}$$

Caso 3.- A es agudo y c obtuso

En este caso C es obtuso y el arco AC > 90°. Se consideran los puntos C y D de manera que AE = 90° y que AD = 90°, y también el arco DE y se prolonga hasta que corte a la prolongación del arco BC. Sea F el punto de intersección.

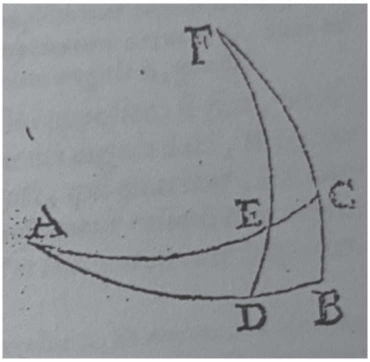


Figura 3. [Clavius, 1586, p. 414]

Se cumplen las siguientes igualdades: D = 90°, E = 90°, E = 90°, BF = 90° y DF = 90°. Como el arco ED corresponde al ángulo A y al arco BC, entonces, considerando el triángulo EFC y aplicando el teorema de los senos resulta que:

$$\frac{\text{sinus CF}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus EF}}{\text{sinus ECF}}$$

Pero EF = 90° –A, CF = 90° – BC y ECF = ACB = C. Entonces se tiene:

$$\frac{\text{sinus C}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus}(90° - \text{A})}{\text{sinus}(90° - \text{BC})}$$

Caso 4.- A obtuso y c obtuso.

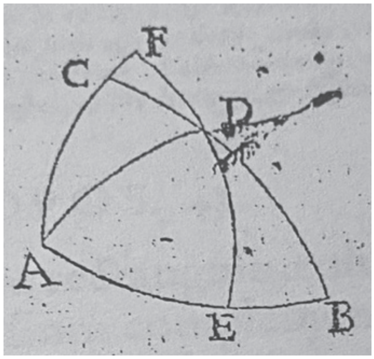


Figura 4. [Clavius, 1586, p, 415]

Se considera el ángulo BAD = 90°, siendo D el punto de intersección de los arcos AC y BC. Sea E el punto del arco AB tal que AE = 90° y sea F el punto de intersección del círculo máximo que pasa por ED y la prolongación del arco AC.

Entonces B = 90°, por hipótesis, BAD = 90°por construccion, AD = 90° y BD = 90°, DAE = 90°, F = 90°, DF = 90° – DE, CD = 90° – DB.

Considerando el triángulo CDF (F = 90°) y aplicando el teorema de los senos, se deduce que:

$$\frac{\text{sinus CD}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus DF}}{\text{sinus DCF}}$$

Es decir: $\frac{\text{sinus DCF}}{\text{sinus DF}} = \frac{\text{sinus totum}}{\text{sinus CD}}$

Teniendo en cuenta la figura: $\frac{\text{sinus ACB}}{\text{sinus (90°-BAC)}} = \frac{\text{sinus totum}}{\text{sinus(90°-BC)}}$

Y de aquí: $\frac{\text{sinus C}}{\text{sinus totum}} = \frac{\text{sinus}(90° - \text{BAC})}{\text{sinus}(90° - \text{BC})}$, como se quería demostrar.

5. LOS INTENTOS DE CLAVIUS PARA COMPLETAR SU OBRA TRIGONOMÉTRICA

Clavius continuó ocupándose de la resolución de triángulos esféricos en su *Astrolabium* (1593) con la intención de acabar de completar su obra trigonométrica. Entre las cuestiones pendientes, quedaba la demostración del teorema del coseno. Mantuvo un flujo de cartas con diversos corresponsales, los cuales colaboraron con él de diversas maneras. En una de ellas, enviada por Jacob Curtz el 8 de diciembre de 1586, se puede leer: "enviaré demostración de la regla de triángulos esféricos no rectángulos [de Johann Werner]". El mismo Curtz, el 24 de marzo de 1587, volvió a escribirle en estos términos: "me alegra que hayas recibido la Gnomonica de Sculteti y la demostración de J. Werner. Estoy cierto que lograrás completar tu doctrina sobre triángulos esféricos, como te pedía". Y Adriann van Roomen, el 11 de mayo de 1592, le escribe: "el año pasado salieron los libros de Philippe Lansberg sobre triángulos esféricos", que le envió posteriormente [BALDINI, 1992].

Sin embargo, Clavius no llega a presentar esa demostración, aunque se acercó a ella a través de la llamada fórmula prostaferésica. Esta fórmula había aparecido en un trabajo manuscrito en 1510, pero no publicado hasta mucho más tarde, del sucesor más destacado de Regiomontanus, Johannes Werner (1468-1522):

$$\text{sen a sen b} = \frac{1}{2}[\text{sen }(90° - a + b) - \text{sen } 90° - a - b)]$$

fórmula que daría lugar al método prostaferésico, que permite evitar las multiplicaciones y divisiones de los valores trigonométricos, ya que requerían hasta cinco o más decimales para que los resultados de los cálculos fueran muy aproximados. La prostaféresis fue publicada por primera vez en 1588, en la obra *Fundamentum astronomicum* de Nicolai Ursus, junto con la regla correspondiente para el producto de dos cosenos:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos (a - b) - \cos (a + b)]]$$

Johannes Werner había enunciado el teorema del coseno de la forma siguiente:

$$\frac{\frac{1}{2}[\text{sen }(90° - a + b) - \text{sen }(90° - b - a)]}{\text{sen }(90° - c) - \text{sen }(90° - b - a)]} = \frac{r}{\text{sen ver }(180° - C]}$$

lo que significa que usó, de forma implícita, la fórmula prostaferésica:

$$2 \sin a \sin c = \cos(a - c) - \cos (a+c) \text{ (Gillispie 1975, p. 274).}$$

En la obra de Tycho Brahe (1546-1601), *Triangulorum planorum sphaericorum praxis aritmetica*, aparece formulado un equivalente al teorema del coseno, usando las fórmulas prostaferésicas [VAN GRUMMELEN, 2009, p. 265]:

$$\cos a = \frac{1}{2}\cos (b - c) + \cos(b + c)] + \frac{1}{2}[\cos (b - c) - \cos(b + c)] \cos A$$

La respuesta de Clavius a la carta de Curtz viene dada en el lema LIII del libro I, y también en el libro III del *Astrolabium*, utilizando el método de la prostaféresis que recientemente había estudiado Ursus.

6. LA DEMOSTRACIÓN DE CLAVIUS DE LA FÓRMULA PROSTAFERÉSICA

Clavius sigue la demostración de Werner que Ursus había presentado, mejorándola, ya que no utiliza únicamente el seno [CLAVIUS, 1595, p. 178-194]:

"Todas las cuestiones que suelen resolverse mediante senos, tangentes y secantes se obtienen por la sola prostaféresis, es decir, por la sola adición y substracción, sin la laboriosa adición y multiplicación de números.

Hace tres o cuatro años, Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus editó cierto librito en el que entre otras cosas propone un invento ciertamente agudo e ingenioso con el que por la sola prostaféresis resuelve la mayor parte de los triángulos esféricos [de lados a, b y c]. Pero como cree que esto solo puede hacerse cuando se emplean senos en la regla de proporciones y el *sinus totus* ocupa el primer lugar, intentaremos nosotros hacer esta doctrina más general, de forma que no se aplique sólo a senos y cuando el *sinus totus* ocupe el primer lugar en la regla de proporciones, sino también a tangentes, secantes y otros números, y tanto si el *sinus totus* está al principio de la regla de las proporciones, o en medio, o finalmente [p. 179] no interviene para nada: lo cual es totalmente nuevo y llena de deleite y placer.

Pues siempre que es, como el *sinus totus* al seno de un arco, el seno de otro arco a cierta cantidad, si se suponen dados estos arcos que se requieren para la prostaféresis: súmese al menor el complemento del mayor, y guárdese el seno del arco compuesto.

$$[\text{Si } \frac{1}{\text{sen a}} = \frac{\text{sen b}}{x} \text{, y } a < b \text{, guárdese } S_1 = \text{sen } (90° - b + a)].$$

Y si el arco menor fuera igual al complemento del arco mayor (lo que sucede cuando los dos arcos diferentes dados completan un cuadrante) la mitad del seno guardado será el cuarto número proporcional buscado.

[Si $a = 90° - b$, entonces $x = 1/2\,S_1$; en nuestra álgebra: $x = \text{sen a sen b} = 1/2 \cos (b - a)$].

Pero si el arco menor fuera menor que el complemento (lo que sucede cuando los arcos dados son conjuntamente menores que un cuadrante) restado el arco menor del complemento del mayor para tener la diferencia de los arcos que antes fueron sumados, y réstese del seno guardado del arco compuesto anterior el seno de esta diferencia. Entonces la mitad de este número que queda será el cuarto número proporcional buscado.

Pero si $a < 90^0 - b$, entonces $S_2 = \text{sen}(90^0 - b + a) - \text{sen}(90^0 - b - a)$ y $x = 1/2\,S_2$, es decir $x = \text{sen a sen b} = 1/2 \cos (b - a) - 1/2 \cos (b + a)$], que es la fórmula prostaferésica.

Si finalmente el arco menor fuera mayor que el complemento del mayor (lo que ocurre cuando los dos arcos dados son conjuntamente mayores que el cuadrante) restado del arco menor el complemento del mayor, para que resulte la diferencia de estos arcos que fueron sumados conjuntamente, añádase el seno de esta diferencia al seno guardado del arco superior completado. Pues la mitad de esa suma será el cuarto número proporcional buscado.

[Si por fin $a > 90° – b$, entonces $S_3 = S_1 + \text{sen}\,(a + b – 90°)$ y $x = 1/2\ S_3$, es decir, teniendo en cuenta el signo del seno, se cumple también:

$$x = \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b = 1/2\cos\,(b – a) – 1/2\ \cos(b + a)].$$

Y esta es la regla de dicho autor, que se demostrará así. En la primera de estas figuras[16] es [*cf.* 4 del 6º], como el *sinus totus* EG a GK, sino del arco GD, así Ei, seno del arco ID, o HM, al seno buscado iL. Y dado que el arco GD es igual al DG, complemento del arco mayor ID (o, si GD fuera mayor, e ID menor; el menor ID es igual al DI, complemento del arco mayor GD), resulta como PQ[17]que es [cf. 2 del 6º] la mitad del seno MP del arco MD compuesto de DG, el arco menor, y GM, complemento del mayor HM,[18] resulta [*cf.* 34 del 1º] igual al cuarto seno buscado iL. Y si el arco GD fuera mayor, e ID menor, de todas maneras, MP será el seno del arco MB compuesto entonces de HM, el menor, y HB, el complemento del mayor GD.

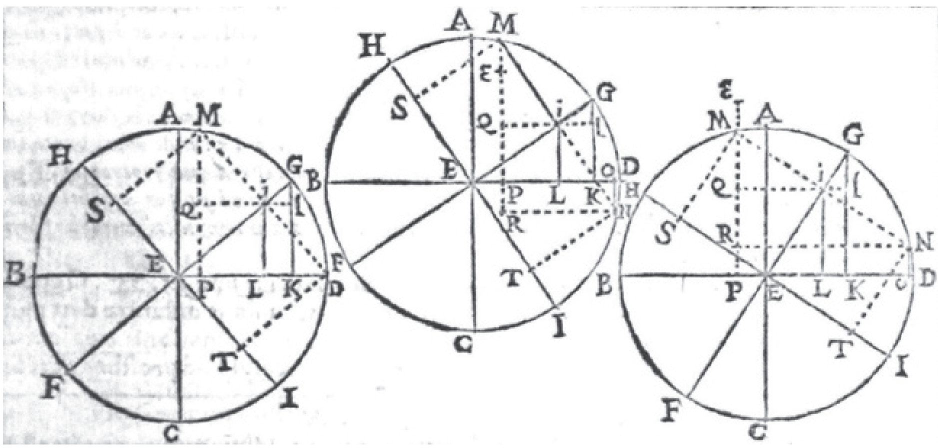


Figura 5. [Clavius, 1595, p. 179]

16. "Pero obteniendo el sinus totus el primer lugar de la regla de proporciones, cuando los otros dos números no son senos, han de tomarse en lugar del seno de aquellos números, arcos en la tabla de senos, y se han de separar aparte".
17. "Por tanto ha de aplicarse la regla antedicha. Ha de hacerse lo mismo cuando se utiliza el seno del complemento de algún arco".
18. "Pues entonces no ha de separarse ese arco, sino tomarse en el lugar que está el seno, en cuanto le corresponde correctamente".

[EG (=1) / GK (= sin GD) = Ei (= sin ID = sin HM) / iL, y dado que en este caso es GD = DG (= 90^0 - ID), suponiendo ID > GD (o si GD > ID, sería ID = DI (= 90^0 - GD)), resulta PQ (= ½ MP = ½ sin MD) = iL (= sen (DG + GM)) = ½ sen (DG + 90^0 - HM)].[19]

En la segunda y en la tercera es también [*cf.* 4 del 6º)], como el *sinus totus* EG, a GK, seno del arco GD, así es Ei, seno del arco IN, o HM, al seno iL buscado. Y dado que en la segunda figura el arco menor GD es menor que el GN [p. 180], complemento del arco mayor IN, (o si GD fuera mayor e IN, menor; el menor IN sería menor que ID, complemento del arco mayor GD) resulta que, restando el seno RP del arco diferencia DN, es decir, restando M€, igual al RP, de MP, seno del arco MD, compuesto del arco menor DG y GM, complemento del mayor HM, la recta PQ, que es la mitad de lo que queda εP, [*cf.* 2 del 6º][20] como toda QR, sea la mitad de todo MR [*cf.* 34 del 1º],[21] será igual al senos buscado iL. Y si el arco GD fuera mayor e IN menor, MP será con todo el seno del arco MB, compuesto del entonces arco menor MH, y HB, complemento del arco mayor GD.

[EG (=1) /GK (= sen GD) = Ei (= sen (IN=HM) /iL, y puesto que en este caso es GD<GN(=90º-IN), suponiendo GD<IN (si GD>IN, sería IN<ID (=90º-GD)), resulta que MP(=senMD=sen(DG+GM(=90º-HM)))-RP(=senDN= M ε)=εP, e iL=1/2 εP, por ser QR= ½MR. Y si GD>IN, MP=sen MB=sen (MH+(90º-GD))].

Y en la tercera figura, dado que el arco menor IN es mayor que el ID, complemento del arco mayor GD (o si GD fuera menor e IN mayor; el menor GD excedería al GN, complemento del arco mayor IN), resulta que, añadiendo el seno RP del arco diferencia DN, es decir añadiendo Mε, igual al RP, a MP, seno del arco MB, constituido por el arco menor HM y de HB, complemento del mayor AH; la recta PQ, que es la mitad de toda la recta compuesta εP [*cf.* 2 del 6º],[22] como la mitad del MR resulta QR [*cf.* 34 del 1º],[23] será igual al seno buscado iL. Y si el arco GD fuera menor y el IN mayor, de todas maneras, será MP, seno del arco MD, constituido entonces del arco menor GD, y de GM, complemento del mayor HM.

[EG (=1)/GK (= sen GD) = Ei (= sen IN = sen HM) / iL, y dado que en este caso es GD<GN (= 90^0 - IN), suponiendo IN < GD (si GD < IN, sería GD > GN (=90^0 - IN), resulta que MP (= sen MB = sen (HM + HB(90º-AH))) + RP (= sen DN = Mε) - εP, y PQ (=1/2 εP) = iL es el seno buscado, por ser QR = 1/2 MR. Y si GD> IN, MP = sen MB = sen (MH + (90^0 - GD))].

19. "Finalmente a veces el número segundo y tercero no son senos, o uno de ellos lo es y el otro no, y ha de tomarse como arco, cualquier número que le corresponda puede serlo".
20. "Así, sin embargo, cuando el número es mayor que el sinus totus…".
21. "…se toma la parte décima del número, cuando dos, la centésima, y así sólo queda la parte décima, centésima del número buscado".
22. "Y así ha de multiplicarse la parte encontrada por 10 o por 100, lo cual se hace añadiendo 0. o 00., para obtener todo el número".
23. "Pero toda esta cuestión, la haremos más clara con algunos ejemplos".

Y en el caso que dos arcos separados fuesen iguales, ha de tomarse uno de los dos como complemento, y considerar el otro como menor”.

Clavius da a continuación un ejemplo de la aplicación de la fórmula prostaferésica a la resolución de un triángulo con datos astronómicos:

“[Supongamos], por ejemplo, que hubiéramos de investigar la declinación 17^0 45’. Puesto que es como el *sinus totus* al seno de la máxima declinación, así, el seno de la distancia de un punto dado de la elíptica a un punto próximo al punto del equinoccio, al seno de la declinación de un cierto punto dado, como demostramos en el lema 18, así será un ejemplo de prostaféresis.

	G	M			G	M	
Arco máx. declin.	23	30	Compl.	Mayor.	12	15	Núm. mayor es menor q.
Dist. a equinoccio	77	45	Menor		23	30	Compl. ident. añadido

Suma del complemento y el menor	35	45	seno	5842497
Diferencia entre el complemento y el menor	11	15	seno	1950903

seno encontrado	3896700	suma de senos	7793400
Declinación corresp.	G 22, M 56	mitad o seno declin.	3866700

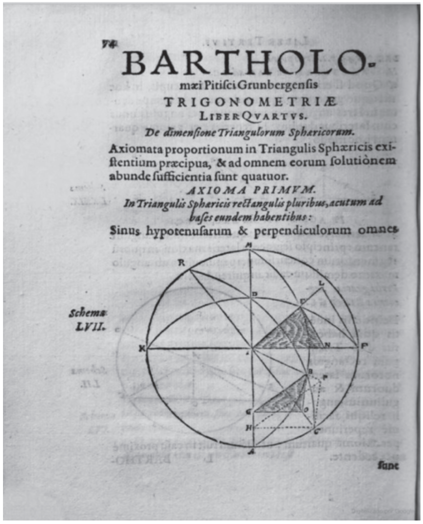
Este resultado permitía, pues, transformar el producto de dos senos en una diferencia de cosenos. Sin embargo, Clavius no llegó finalmente a conseguir la demostración del teorema del coseno a partir de la fórmula prostaferésica; así que cuando, en 1593, presenta de nuevo la resolución de triángulos en el *Astrolabium*, vuelve a subdividir el triángulo en dos de rectángulos.

Finalmente, sería Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) quien, en el año 1595, presentó la primera demostración del teorema del coseno en un anexo del libro *Sphaericorum libri tres methodicé conscripti et utilibus schoolis expositi* de A. Scultetus, y también, en 1600, cuando publicó la versión revisada de su obra en *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque*, publicado en Augsburgo, siendo además Pitiscus el introductor de la palabra trigonometría. El libro está dividido en tres secciones, la primera de las cuales está dedicada a la trigonometría plana y esférica. Esta última está dividida en cinco libros. El cuarto de ellos está dedicado a la demostración de cuatro teoremas fundamentales de la trigonometría esférica, el último de los cuales es la del teorema del coseno.

Los enunciados de los tres primeros teoremas que Pitiscus demuestra son los siguientes:

Axioma primero [lema 1, p. 74]. En una sucesión de triángulos esféricos rectángulos que tienen en las bases [que son catetos] un ángulo agudo en común: los senos de todas las hipotenusas y alturas [que son los restantes catetos] son proporcionales entre sí.

Axioma segundo [lema 2, p. 77]. En la sucesión de triángulos esféricos rectángulos que tienen en las bases un ángulo agudo en común: los senos de las bases y las tangentes de las alturas son proporcionales entre sí.


74

BARTHOLO-
mæi Pitiſci Grunbergenſis
TRIGONOMETRIÆ
LIBER QVARTVS.
De dimenſione Triangulorum Sphæricorum.
Axiomata proportionum in Triangulis Sphæricis exiſtentium præcipua, & ad omnem eorum ſolutiònem abunde ſufficientia ſunt quatuor.
AXIOMA PRIMVM.
In Triangulis Sphæricis rectangulis pluribus, acutum ad baſes eundem habentibus:
Sinus hypotenuſarum & perpendiculorum omnes

Schema LVII.

ſunt

Figura 6. El libro cuarto de trigonometría de Bartholomaeus Pitiscus de Grunberg sobre la medida de los triángulos esféricos [Pitiscus, 1600, p. 74]

Axioma tercero [lema 3, teorema de los senos, p. 80] En todos los triángulos esféricos: los senos de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

El enunciado y demostración del teorema del coseno en general [p. 85] aparece en el "Axioma cuarto:

En todos los triángulos esféricos [ABC]: Dados dos lados, cada uno menor que un cuadrante, y los compuestos primero ellos entre sí, y después el lado menor y el complementario del mayor [a, c < 90°, c < a; compuestos: anterior C_1 = a + c; posterior C_2 = c + 90° – a]; y al seno del arco compuesto posterior le restas el seno del complemento del compuesto anterior [R = sen (c + 90° – a) – sen (90° – c – a), si a + c ≤ 90°], o le sumas el exceso [S = sen (c + 90° – a) + sen (c + a – 90°), si a + c > 90°]. Es:

Como el radio, a la mitad del segmento que resulta de esta resta o suma; así el seno verso del ángulo comprendido entre los lados citados, al segmento que resta del seno del arco compuesto posterior deja el seno complemento del tercer lado

$$\left[\frac{1}{1/2}\ (\text{R o bien S}) = \frac{1 - \cos B}{\text{sen}\ (c + 90° - a) - \cos b}\right];$$

O bien del cual restado el seno del arco compuesto posterior deja al seno del exceso del tercer lado.

$$\left[\text{o bien}\ \frac{1}{1/2}\ (\text{R o bien S}) = \frac{1 - \cos B}{\text{sen}\ (c + 90° - a) + \text{sen}\ (b - 90°)}\right]\text{"}$$

Presentamos la demostración de Pitiscus transcrita al lenguaje simbólico y utilizando las razones trigonométricas en la forma actual.[24]

Sean los puntos D, F, G, N, K, M y X tales que: a

$$\widehat{BD} = \widehat{BF} = \widehat{BC} = a$$

$$\widehat{AB} = c = \widehat{GN}$$

$$\widehat{AC} = b = \widehat{AK} = \widehat{AM}$$

$$\widehat{DX} = \widehat{B}$$

se tiene que: $\widehat{ND} = \widehat{NG} + \widehat{GD} = \widehat{NG} + (90° - \widehat{BD}) = c + 90° - a$

El arco $\widehat{AB} + \widehat{BF} = c + a = \widehat{AF}$ puede ser igual mayor, menor o igual a 90º. Las tres figuras correspondientes son:

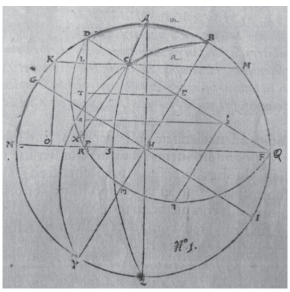


Figura 7. [Pitiscus, 1600, p. 86]

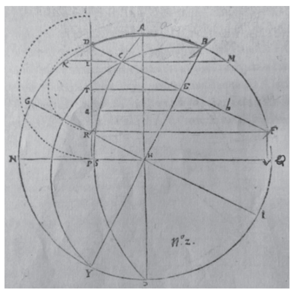


Figura 7. [Pitiscus, 1600, p. 87]

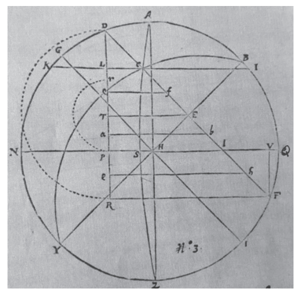


Figura 7. [Pitiscus, 1600, p. 88]

Sean r el radio de la esfera y $r_1 = \overline{ED}$, que es el radio del paralelo.

Sea R el punto tal que $\overline{DT} = 1/2\ \overline{DR} = 1/2\ (\overline{DP} \pm \overline{PR})$, según que c + a sea mayor, menor o igual a 90^0.

En el caso que $c + a < 90°$, se tiene que:

$$\overline{DT} = 1/2\ [r \operatorname{sen}(c + 90° - a) - r \operatorname{sen}(90° - a - c)]$$

$$\overline{DP} = r \operatorname{sen}(c + 90° - a)$$

$$\overline{LP} = r \operatorname{sen} \widehat{KN} = r \operatorname{sen} \widehat{CS} = r \operatorname{sen}(90° - \widehat{AC}) = r \operatorname{sen}(90° - b)$$

$$\overline{DL} = \overline{DP} - \overline{LP} = r[\operatorname{sen}(c + 90° - a) - \operatorname{sen}(90° - b)]$$

$$\overline{CD} = r_1(1 - \cos B)$$

24. Pitiscus utiliza el sinus totus, sinus rectus y el sinus versus en relación con el radio del paralelo y al de la esfera respectivamente, según el ángulo.

Como que los lados correspondientes de los triángulos semejantes EDT y CDL son proporcionales, se verifica que:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DL}}$$

Y, por tanto, se tiene que:

$$\frac{r_1}{1/2\ r[\text{sen }(c + 90° - a) - \text{sen }(90° - a - c)]} = \frac{r_1 (1 - \cos B)}{r[\text{sen }(c + 90° - a) - \text{sen }(90° - b)]}$$

fórmula que se corresponde con el teorema del coseno:

$$\frac{1}{1/2\ [\cos (a - c) - \cos (a + c)]} = \frac{1 - \cos B}{\cos (a - c) - \cos b}$$

que desarrollada adopta la forma más conocida actualmente:

$$\cos b = \cos a \cos c + \text{sen } a \text{ sen } c \cos B$$

La demostración de los otros dos casos se realiza de forma similar. Quedó así establecida la primera demostración del teorema del coseno para los lados de un triángulo esférico cualquiera.

Bibliografía

Ausejo, Elena (1984). "Trigonometría y astronomía en el "Tratado del Cuadrante Sennero" (c. 1280)". *Dynamis,* 4, 7-22.

Baldini, Ugo & Napolitani, Pier Daniele (1992). *Christoph Clavius: Corrispondenza* (7 vols.). *Edizione critica*. Pisa, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

Clavius, Christopher (1581). *Gnomonices Libris VIII*. Roma, apud Franciscum Zanettum.

Clavius, Christopher (1586). *Theodossi Tripolitae Sphaericorum libri III.* Roma, Dominici Basae.

Clavius, Christopher (1593). *Astrolabium*. Roma, apud Bartholomaei Grassi.

Fourier, Jean-Baptiste-Joseph (1807). "Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides'. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique de Paris, 1(6),* 112-116.

Gillispie, Charles C. (1975) (ed.) "Werner, Johannes". *The Dictionary of Scientific Bibliography*. New York, Charles Scribner. 11, 274-277.

Guerola, Joaquim (2018). *El Collegio Romano i els orígens de la trigonometria: de l'Analemma de Ptolemeu a la Gnomonica de Clavius*. [Tesis doctoral]. Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona.

HALLEY, Edmond & COSTARD, George (1758). *Sphaericorum libri III*. Oxonii, Sumptibus academicis.

LORCH, Richard P. (1975) "The astronomy of Jābir ibn Aflah". *Centaurus 19*, 85-107. [Reimpreso en LORCH, Richard P. (1995). *Arabic mathematical sciences. Instruments, texts, transmission.* London, Routledge].

MILLÁS VALLICROSA, Josep María (1960). Una nueva obra astronómica alfonsí: el Tratado del cuadrante 'Sennero", En: Josep María Millás Vallicrosa. *Nuevos Estudios sobre Historia de la Ciencia Española*. Barcelona, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 251-258. [Originalmente publicado en *Al-Andalus, 21(1),* 59-92].

MORELON, Régis (1987). «Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-Hay'a (La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du Xe siècle), texte établi et traduit par Marie-Thérèse Debarnot. Damas, IFD, 1985». *Bulletin critique des Annales islamologiques*, *4(1)*, 177-179.

PITISCUS, Bartholomeo (1595). "Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicus". En: Abrahami Scultetus. *Sphaericorum libri tres methodicé conscripti et utilibus scholiis expositi.* Heidelberg, Typis Abrahami Smefmanni.

PITISCUS, Bartholomeo (1600). *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque*. Augsburg, Augustae Vindelicorum.

REGIOMONTANUS, Johannes (1533). *De triangulis omnimodis libri quinque*. Nuremberg, Petreius.

ROSENFELD, Boris. A. (1993). "Geometric trigonometry in treatises of al-Khwārizmi, al-Māhānī and Ibn al-Haytham». En: Menso Folkerts & Jan P. Hogendijk (eds) *Vestigia Mathematica: Studies in Medieval Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard.* Amsterdam, Atlanta, Rodopi, 305- 308.

SAMSÓ, Julio (2011). *Las Ciencias de los Antiguos en al-Andalus*. Almeria, Fundación Ibn Tufayl de Estudios Árabes.

SAMSÓ, Julio (2020). *On Both Sides of the Strait of Gibraltar. Studies in the History of Medieval Astronomy in the Iberian Peninsula and the Maghrib*. Leiden/Boston, Brill, 683-688.

URSI, Nicolai R. (1588). *Fundamentum astronomicum, id est Nova eiusque usus in astronomica calculatione & observatione doctrina sinuum et triangulorum eaque absolutissima et perfectissima.* Argentorati, excudebat Bernhardus Iobin.

VAN BRUMMEELEN, Glen (2009). *The mathematics of the Heavens and the earth: the early history of trigonometry*. Princenton, Princenton University Press.

VILLUENDAS, M. V. (1979). *La Trigonometría europea en el siglo XI: Estudio de la Obra de Ibn Mu'ā, El Kitāb Māhūlāt.* Barcelona, Instituto de historia de la ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.

ZELLER, Mary Claudia (1944).*The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. [Tesis doctoral]. Ann Arbor, University of Michigan.