CLIFFORD E OS PRIMEIROS PASSOS DA ELABORAÇÃO DAS ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS

Clifford and the first steps in the elaboration of geometric algebras

Jonatan Pinsard Prates de Lima
Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
ORCID ID: 0009-0002-1596-493X

Gérard Émile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
ORCID ID: 0000-0003-1075-5530

Resumo

Este artigo estuda o processo de elaboração e o conteúdo do primeiro artigo de Clifford *Preliminary Sketch of Biquaternions*, que constitui a primeira etapa da concepção das álgebras geométricas. A primeira parte deste artigo analisa a formação de Clifford e os seus primeiros trabalhos publicados. As outras partes estudam em detalhe o conteúdo do *Preliminary Sketch of Biquaternions,* primeira tentativa do autor para criar uma álgebra que caracterize os movimentos de um corpo rígido no espaço. O artigo de Clifford é dividido em 5 seções. Nas duas primeiras seções, o autor cria o conceito de rotor para operar as rotações no espaço e o conceito de motor para o movimento mais geral de um corpo rígido, sendo um motor constituído de um vetor e de um rotor. Clifford procura os operadores algébricos que dessem conta dos movimentos mais geral de um corpo rígido chegando assim aos biquatérnios. A álgebra assim esboçada fica num quadro euclidiano. Nas três últimas seções, Clifford desenvolve a teoria dos rotores e motores no contexto da geometria elíptica, utilizando a métrica de Cayley e Klein nas esferas S^2 e S^3.

Abstract

This article studies the process of elaboration and the content of Clifford's first article Preliminary Sketch of Biquaternions, which constitutes the first stage in the conception of geometric algebras. The first part of this article analyzes Clifford's formation and his first published works. The other parts study in detail the content of the Preliminary Sketch of Biquaternions, the author's first attempt to create an algebra that characterizes the movements of a rigid body in space. Clifford's

Recibido: 29/10/2024 – Aceptado: 14/12/2024
https://doi.org/10.47101/llull.2025.48.96.pinsard

article is divided into 5 sections. In the first two sections, the author creates the concept of a rotor to operate rotations in space and the concept of a motor for the more general movement of a rigid body, a motor consisting of a vector and a rotor. Clifford looks for algebraic operators that would give an account of the more general movements of a rigid body, thus arriving at biquaternions. The algebra thus outlined is in a Euclidean framework. In the last three sections, Clifford develops the theory of rotors and motors in the context of elliptical geometry, using the Cayley and Klein metric on spheres S^2 and S^3.

Palavras-chave: Álgebras de Clifford, álgebras geométricas, Biquatérnios, Clifford, geometria elíptica

Keywords: Clifford algebras, geometric algebras, Biquaternions, Clifford, elliptic geometry

1. Introdução

As álgebras de Clifford foram conhecidas no século XX por suas aplicações a Mecânica Quântica. Mais recentemente, um grupo de cientistas publicou uma série de trabalhos mostrando como fundamentar a mecânica clássica e relativista a partir dessas álgebras [Hestenes, 2002; Doran e Lasenby, 2003], assim como diversas aplicações à ciência da computação [Dorst *et al.*, 2002; Dorst *et al.*, 2007]. Esse interesse recente leve a analisar as origens dessas álgebras, o objetivo do nosso artigo.

A elaboração por Clifford das álgebras geométricas é um processo que se inicia com o artigo *Preliminary Sketch of Biquaternions* [Clifford, 1873]. Pretendemos investigar os primeiros passos desse processo, ou seja, os seus anos de formação e suas pesquisas anteriores a 1873 que servem de prelúdio à elaboração do artigo de Clifford. Necessita-se analisar tanto a formação do autor, quanto as primeiras pesquisas que, aliás, se iniciam nos anos de formação. Um estudo preciso do conteúdo do *Preliminary Sketch of Biquaternions* é necessário para entender melhor o papel deste nas contribuições posteriores de Clifford visando a conceber deste modo todas as álgebras geométricas possíveis nos anos seguintes.

Nosso artigo está assim dividido em três partes. Num primeiro tempo, estudamos os anos anteriores à publicação do *Preliminary Sketch of Biquaternions*, os anos de formação, entre 1863 e 1867, quando Clifford redige os seus primeiros artigos, e o período entre 1868 e 1873, onde inicia a sua carreira enquanto matemático. Num segundo tempo, analisamos especificamente este artigo que tem duas partes por ele delimitadas: uma parte dedicada à descrição de movimentos rígidos de um corpo no espaço euclidiano mediante operações envolvendo os quatérnios; e outra parte dedicada à possibilidade do uso da geometria elíptica para descrever esses movimentos rígidos.

O primeiro acesso a esses artigos se deu, na maioria das vezes, através da coletânea *Clifford Mathematical Papers* [Clifford, 1882], editada por Robert Tucker, indo depois às publicações originais. Na coletânea, constam também uma breve biografia de Clifford, escrita por Frederick Pollock, e uma breve descrição bibliográfica de toda a obra de Clifford, escrita por Henry Smith.

2. Formação de Clifford e primeiros artigos

Clifford nasceu na cidade inglesa de Exeter, em 4 de maio de 1845, e morreu na Ilha da Madeira, Portugal, em 3 de março de 1879, com 33 anos. Teve seus primeiros estudos em Exeter desde 1860. Estudou no *King's College*, em Londres, onde já se destacou nos exames locais. Na sua vida, estudou vários idiomas. Ele era fluente em francês, grego moderno, tinha um bom domínio em alemão e espanhol, e chegou a aprender árabe. Se destacou em vários momentos, desde o colégio até a universidade, conquistando prêmios e menções honrosas não só em matemática, mas em outras áreas do saber, como poesia e literatura. Uma extensa biografia (escrita por Frederick Pollock) de Clifford foi inserida no início do livro póstumo *Lectures and Essays* [Clifford, 1879], que reúne diversas palestras e escritos filosóficos de Clifford, bem como textos relacionados à mecânica, à geometria e à sua concepção sobre o universo.

Clifford se formou no Trinity College, Cambridge, em 1867. Se tornou professor de matemática aplicada e mecânica na University College, Londres, em 1871, ocupando esse posto até sua morte. Se tornou membro da *London Mathematical Society* em junho de 1866, participando do conselho de 1868 até 1876, e membro da *Royal Society* em junho de 1874.

Segue abaixo uma declaração de Sylvester sobre um prêmio conquistado por Clifford:

> Como o falecido Dr. Whewell, o professor Clerk Maxwell, e Sir William Thomson, Sr. Clifford foi segundo Wrangler na Universidade de Cambridge. Acredito que ele poderia facilmente ter sido o primeiro do ano, se tivesse escolhido dedicar-se exclusivamente ao currículo universitário em vez de prosseguir estudos, ainda na graduação, em um campo mais extenso, e com vista mais a sua própria cultura geral, do que à aquisição de honra ou emolumento imediato [Pollock apud Clifford, 1879, p. 13. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Os *mathematical tripos* eram um tipo de exames que aconteciam no terceiro ano da graduação dos alunos da universidade de Cambridge. Seu início ocorreu por volta de 1725 [Ball, 1889, p. 187], tendo ganhado cada vez mais espaço e importância nas décadas seguintes. Os prêmios eram divididos entre Wranglers e Senior Optimes, sendo que os Wranglers, principalmente o primeiro (sênior Wrangler) e o segundo (second Wrangler) culminavam em muito destaque e eminência para o premiado. Muitos dos sêniors Wranglers e second Wrangers assumiram cadeiras em universidades ou ocuparam espaços importantes dentro da política posteriormente [Forfar, 1996]. Esse exame foi tendo alterações graduais desde seu princípio até a década de 1860, quando Clifford o prestou, que vão desde a extensão do número de dias de duração até os assuntos abordados.

Vários cientistas famosos o precederam nesta distinção: Sylvester foi *second Wrangler* em 1837, George Gabriel Stokes foi o *sênior Wrangler* em 1841, e Arthur Cayley em 1842. Sir William Thomson (lorde Kelvin) foi *second Wrangler* em 1845, Peter Guthrie Tait foi *sênior wangler* em 1852, James Clark Maxwell foi *second Wrangler* em 1854 [Ball, p. 135]. Isto mostra como a formação de Clifford segue os passos de cientistas que desempenharam um papel essencial na matemática britânica da segunda metade do século XIX. O autor faz uma breve descrição da matemática inglesa até o ano considerado (1859):

> O ano em que paro é o primeiro dos estatutos vitorianos; e é uma data bem definida em que posso encerrar esta história. Vivemos numa época um tanto análoga à do início do Renascimento. O sistema de educação sob os estatutos elisabetanos – estreito na sua gama de estudos e baseado em testes teológicos – deu lugar a um onde assuntos de todos os tipos são estudados com entusiasmo. A ascensão da escola analítica em matemática e o estabelecimento dos tripos clássicos em 1824 são os primeiros sinais exteriores e visíveis da nova atividade intelectual que estava acelerando toda a vida da universidade. Os matemáticos tiveram a sua plena participação nessa vida, e o fato de terem novamente elevado Cambridge à posição de uma das principais escolas matemáticas da Europa será, creio, admitido pelo historiador da história subsequente da matemática em Cambridge. [Ball, 1889, p. 137].

Ball também explica como ocorreu a introdução gradual do cálculo na universidade, rompendo finalmente com a tradição newtoniana, a qual trazia atrasos à matemática inglesa em relação àquela praticada no continente.

Figura 1. William Kingdon Clifford.
Fonte: *Lectures and Essays,* vol. II [Clifford, 1879].

2.1. Os escritos de 1863 até 1867

Apesar de se formar na graduação apenas em 1867, Clifford começa a escrever textos matemáticos bastante elaborados desde 1863, quando tinha apenas 18 anos e se encontrava no início da graduação. Entre 1863 e 1867, Clifford escreve 10 artigos, publicados em várias revistas, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, Mathematics from the Educational Times e sobretudo The Quaterly Journal of Pure and Applied mathematics, a revista então dirigida por Sylvester. Esses artigos representam suas primeiras pesquisas. Entretanto, analisando seus conteúdos, é possível ter uma noção sobre quais assuntos ele mais se interessava e, portanto, direcionava sua pesquisa nessa época.

Com efeito, nesses anos de formação, o principal interesse de Clifford é orientado para a geometria, influenciado pelas leituras das obras de Salmon sobre geometria analítica e seções cônicas e pelas seis primeiras memórias "On Quantics" de Cayley. Por exemplo, em *The*

Analogues of Pascal's Theorem [Clifford, 1863], escrito em novembro de 1863, quando Clifford tinha apenas 18 anos, já utiliza resultados de Cayley e cita o livro do Salmon *A Treatise on the Higher Planes Curves* [Salmon, 1852], mostrando conhecer bem essa obra. Esse artigo é o primeiro escrito de Clifford. Em *On Jacobians and Polar Opposites* [Clifford, 1863], trabalha também o assunto a partir de obra de Salmon, em particular *A Treatise on Conic Sections* [Salmon, 1855]. No artigo *On Triangular Symmetry* (1865), Clifford ele fala das propriedades projetivas de algumas figuras. Nesse artigo ele também cita o Cayley e cita o Sylvester.

O artigo *Analytical Metrics* [Clifford, 1865], escrito em 1864 e publicado em 1865, merece certo destaque, tanto pelo seu conteúdo quanto eloquência de sua apresentação quanto pela sua extensão. Nele, Clifford já menciona a diferença entre a geometria que estuda as propriedades projetivas (posicionais) das figuras e a geometria métrica, citando o trabalho de Poncelet. Clifford utiliza o método de Cayley na sexta memória On quantics [Cayley, 1859] para definir uma métrica a partir do conceito de Absoluta. Inicia a sua pesquisa a partir da métrica definida sobre uma reta em coordenadas homogêneas e ressalta a noção de invariante da dupla razão. Passa a definir a métrica sobre o plano, estudando propriedades já trabalhadas por Cayley. A Parte mais original do artigo é a generalização a um espaço de três dimensões da métrica de Cayley, estudando as incidências de plano e retas com o círculo imaginário ao infinito pelo qual passam todas as esferas. Isso ilustra talvez a observação de Cayley citada acima da escolha de Clifford não "se dedicar exclusivamente ao currículo universitário".

No artigo *On the General Theory of Anharmonics* [Clifford, 1866], ele define algumas relações harmônicas entre as distâncias entre pontos, retas e planos. As razões entre as distâncias entre pontos colineares e ângulos entre retas concorrentes que não se alteram sob projeção são relações fundamentais dentro da geometria projetiva. Nesse artigo, ele usa essas relações para falar de distâncias de maneira mais generalizada. A definição de distância em geometria projetiva a partir da relação harmônica será utilizada também no *Preliminary Sketch of Biquaternions*.

On the Principal Axes of a Rigid Body [Clifford, 1867] é o primeiro artigo de Clifford que trata sobre mecânica. Nele, Clifford conduz um estudo sobre os momentos de inércia de um corpo rígido se movimentando em relação a diferentes eixos, baseado sobre resultados de Routh, *Rigid Dynamics* e de Salmon *Geometry of Three Dimensions,* determinando como a teoria dos eixos principais de um corpo rígido está relacionado com a teoria das superfícies confocais. O artigo mostra o interesse de Clifford para a teoria do movimento de um corpo rígido.

2.2. Os escritos de 1868 até 1873

De 1868 a 1872, há um total de 30 escritos, sendo 9 deles apenas em 1872. Em 1873, ano de publicação do *Preliminary Sketch of Biquaternions,* há também um total de 9 textos.

A partir de 1867, ano em que Clifford se formou, o número de artigos começa a aumentar a cada ano. No artigo *On a General Investigation of the Theory of Polars* [Clifford, 1868], como o nome sugere, Clifford traz uma generalização do conceito de polaridade entre duas curvas. Para isso, ele começa enunciando que uma curva de "grau n" é aquela que é definida por uma *ponto-equação*[1] de grau n. Uma curva de "ordem m" é uma curva definida por uma *reta-equação* de grau m.

Um texto importante deste período é *On the Theory of Distances*. A primeira parte deste texto se trata das notas entregues por Clifford a Henrici (1840-1918), no encontro da British Association em 1869. O artigo propriamente dito é um texto inacabado e não publicado, cuja data exata de escrita não é conhecida. Nele, Clifford trata das distâncias utilizando a abordagem de Cayley, definindo uma cónica chamada Absoluto, e construindo uma métrica, tal como é feito em *Analytical Metrics*. Clifford já cita neste artigo o *Ausdehnungslehre* de Grassmann [1862]. Utiliza a notação de Grassmann e a expande. Neste trabalho, procura explicitar como definir distâncias como de um ponto a uma cônica definida por suas retas tangentes; de uma reta a uma cônica dada por seus pontos;[2] o ângulo entre as tangentes a uma cônica passando por um dado ponto. Neste texto, traz contribuições originais à teoria da métrica de Cayley. Trabalha essas distâncias tanto na geometria euclidiana quanto na geometria elíptica plana. Conforme Dias [2023, p. 108], apesar da data exata da escrita desse texto não ser conhecida, é provável que tenha ocorrido entre 1869 e 1871, já que Clifford não faz referência ao artigo de Klein de 1871, apesar de citar Felix Klein no decorrer do texto.

Não há espaço aqui para expor todos os textos em que Clifford trabalhou, mas os que foram acima citados mostram quais assuntos ele mais investigou. De fato, grande parte dos interesses de Clifford, desde o início de sua formação até seus últimos anos em vida, recaem sobre geometria, especialmente a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas. Dentre essas, ele dedicou sua atenção especialmente à geometria elíptica, em que a curvatura do espaço é constante e positiva. Segue abaixo uma breve nota de Clifford falando sobre a "descoberta" da geometria de Lobatchevsky: Clifford considera a descoberta dessa geometria tão importante que a compara com as descobertas de Copérnico [p. XLIV]:

> Cada um deles [Copernicus e Lobatchewsky] provocou uma revolução nas idéias científicas tão grande que só pode ser comparada com a forjada pelo outro. E a razão da importância transcendente dessas duas mudanças é que elas são mudanças na concepção do Cosmos [Clifford, 1879, p. 298].

1. Quanto aos termos ponto-equação e reta-equação, na geometria projetiva, uma curva pode ser definida tanto como o conjunto de pontos que pertencem a ela quanto como o conjunto de retas a ela tangentes, surgindo duas possibilidades de definir uma equação para a curva: uma em relação ao conjunto de pontos, outra em relação ao conjunto de retas. Clifford evoca também esses conceitos na terceira parte do *Preliminary Sketch of Biquaternions* [Clifford, 1873].
2. Novamente neste trabalho, assim como em *Analytical Metrics* [Clifford, 1865], Clifford aborda uma cônica de duas maneiras distintas: A cônica pode ser tanto tratada como um conjunto de pontos quanto um conjunto de retas: as retas tangentes à cônica.

Entretanto, apesar de haver muitos textos fazendo referência à geometria e poucos em relação à mecânica, somente em um texto, *Remarks on a Theory of the Exponential Function derived from the equation* $\frac{du}{dt} = pu$ [Clifford, 1872], Clifford cita os quatérnios de Hamilton. Mesmo que em outros momentos Clifford trabalha com vetores, cinemática e mecânica como um todo, ele não utiliza os quatérnios como abordagem. Este texto foi publicado apenas um ano antes do *Preliminary Sketch of Biquaternions*. Clifford parece assim ter começado a se interessar aos quatérnios em 1872.

3. Preliminary Sketch of Biquaternions

O *Preliminary Sketch of Biquaternions* [Clifford, 1873] foi escrito em 1873 e publicado na revista *Proceedings of the London Mathematical Society.* Esse texto é dividido em 5 partes, as duas primeiras dedicadas à definição de biquatérnion num quadro euclidiano e as três últimas à aplicação dos biquaternions na geometria elíptica.

3.1. As duas primeiras partes do *Preliminary Sketch of Biquaternions*

Antes mesmo de analisar o conteúdo deste texto, é necessário apontar que, para tratar dos movimentos de um corpo rígido no espaço e das grandezas físicas envolvidas (velocidades, forças, momentos, etc.). Na primeira parte do artigo, Clifford lembra a definição dos conceitos elaborados por Robert Stawell Ball [1871], já que é o único texto do autor publicado antes da elaboração do *Preliminary sketch of Biquaternions.* Inclusive, Ball e Clifford se encontraram pessoalmente nas reuniões da associação britânica [Lipkin e Duffy, 2002, p. 2]. No início da década de 1870, encontraram-se também, numa reunião da mesma associação, com Felix Klein, onde puderam conversar acerca de assuntos como as geometrias não euclidianas, interesse mútuo dos três matemáticos.

Ball publicou várias obras a respeito da mecânica de um corpo rígido. Entretanto, o texto ao qual Clifford teve acesso enquanto ele escrevia o artigo é [Ball, 1871] além das discussões que ele teve com Ball.

3.1.1. *A terminologia de Ball*

Ball define os termos *pitch, screw, twist* e *wrench,* os quais são adotados por Clifford. Ball descreve o movimento helicoidal como uma rotação em torno de um eixo composta com uma translação segundo o mesmo eixo, o passo (pitch) sendo a translação efetuada ao longo do eixo depois de uma rotação de 2π radianos. Ball define *screw* como um eixo, representado por uma reta, e o movimento helicoidal como uma rotação em torno do eixo [Ball, 1871, p. 159].

Quando um corpo recebe um “*twist about a screw*”, o passo indica proporção entre a distância que o corpo percorre na translação e o ângulo que ele descreve na rotação. O passo pode assumir qualquer valor, inclusive + ∞ ou – ∞. Sendo uma razão entre duas magnitudes, da translação e da rotação, respectivamente, se o passo é zero, a magnitude da translação é zero e o movimento é uma rotação pura. Se o passo é infinito, a magnitude da rotação é zero e o movimento é uma translação pura. Ao apertar uma porca em um parafuso, no sentido comum das palavras, o movimento descrito pelo parafuso é uma hélice.

Em termos cinemáticos, quando um corpo realiza um movimento de rotação por um eixo e um movimento de translação ao longo do mesmo eixo, a trajetória do corpo é uma hélice, ou seja, o corpo descreve um movimento helicoidal. Um corpo que faz tal movimento possui duas velocidades: uma de translação e outra de rotação, O eixo da rotação e a direção da translação sendo o mesmo.

Finalmente, em termos dinâmicos, Ball define a palavra *wrench* como um par de uma força resultante que se exerce sobre o corpo e um binário resultante, cujo plano de rotação é perpendicular à força. Um *wrench* fica completamente determinado quando são especificados a força, juntamente com sua direção e sua magnitude, e uma grandeza linear, que é a razão entre o momento do binário e a magnitude da força, o passo do *wrench.* Amarrando esses conceitos, Ball enuncia dois teoremas, os quais atribui a Louis Poinsot (1777-1865), de importância central para esse assunto:

> Qualquer sistema de forças atuando sobre um corpo rígido pode ser composto em um wrench por uma hélice. Um corpo pode ser transferido de uma posição no espaço para outra posição qualquer no espaço por um movimento helicoidal. [Ball, 1871, p. 160. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Esses teoremas garantem que o movimento mais geral de um corpo rígido sempre pode ser descrito por um motor, bem como a resultante das forças que atuam sobre um corpo.

3.1.2. *A elaboração por Clifford de uma álgebra*

Introduzindo o artigo, Clifford traz à tona os vetores de Hamilton, quantidades que têm direção e sentido definidos e possuem uma magnitude, mas não têm posição definida no espaço, podendo ser empregados para representar várias grandezas físicas. Clifford elucida algumas propriedades já conhecidas dos vetores, utilizando também o vocabulário estabelecido por Ball.

Além da terminologia de Ball, Clifford acrescenta na primeira parte do artigo um novo conceito que é o rotor. O rotor é exatamente uma rotação do espaço, que transforma um vetor em outro vetor através de uma rotação por um eixo que é perpendicular a ambos os vetores. Clifford o define da seguinte forma:

> Proponho usar o nome rotor (abreviação de rotator) para significar uma quantidade tendo magnitude, direção e posição, das quais o tipo mais simples é uma velocidade de rotação em torno de um certo eixo. Um rotor será representado geometricamente por um comprimento proporcional à sua magnitude medida sobre seu eixo em certo sentido. O rotor AB será idêntico a CD se estiverem na mesma linha reta, do mesmo comprimento, e no mesmo sentido; isto é, um vetor pode se mover de qualquer maneira paralelo a si mesmo, mas um rotor apenas em sua própria linha. A adição de rotores seguirá as regras que regem a composição de forças e rotações. [Clifford, 1873, p. 381. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

É importante notar que Clifford trabalha sobre três registros: cinemático, dinâmico e geométrico. Isto é, um vetor pode representar tanto uma velocidade de translação, uma força que atua sobre um corpo ou também uma translação, que é uma isometria do espaço. Um rotor pode representar uma velocidade de rotação, um binário de forças ou uma rotação. A composição de uma velocidade de translação com uma velocidade de rotação é uma *velocidade de torção (twist)*, enquanto a composição de uma força com um binário atuando no mesmo eixo dessa força é um *wrench,* e a composição de uma translação com uma rotação é uma *hélice* (*screw).* Em termos atuais, o rotor é um produto vetorial de uma força F pela distância ao eixo de rotação:

$$r = F \times d$$

Do ponto de vista cinemático, é o momento da velocidade em relação ao eixo é também um produto vetorial. Esses vetores podem ser representados por um vetor que tem por suporte o eixo do movimento de rotação.

Diferentemente dos vetores de translação, os rotores são operadores que possuem, além de direção, sentido e magnitude, uma posição definida no espaço, sendo bem empregados na descrição de grandezas físicas como binários fornecem a um corpo rígido um momento angular. Um rotor está associado a um eixo e uma magnitude, já que um movimento de rotação é descrito completamente quando é informado seu eixo de rotação e sua magnitude (e seu sentido).

Clifford observa então que os rotores não se somam, ao contrário dos vetores de translação. A composição de duas translações é a translação da soma dos dois vetores. Enquanto o efeito da composição de dois rotores é a composição de duas rotações no espaço. Quando os eixos das rotações se intersectam, a composição ainda será uma rotação. No entanto, no caso em que os eixos das rotações não se intersectam, a composição de duas rotações não será uma rotação, mas uma rotação composta com uma translação, o que caracteriza o movimento mais geral de um corpo rígido.

A grandeza que descreve a composição de um movimento de rotação em torno de um eixo com um movimento de translação em torno do mesmo eixo (movimento helicoidal, screw) é chamada de *motor*. Clifford os define da seguinte forma:

> Assim como um vetor (velocidade de translação ou binário) é associado à magnitude associado com direção, e como um rotor (velocidade de rotação ou força) é magnitude associada a um eixo; então esta nova quantidade, que é a soma de dois ou mais rotores (*twist-velocity*) é a magnitude associada a um *screw*. Seguindo a analogia assim indicada, eu proponho chamar essa quantidade de motor. [Clifford, 1873, p. 382. Tradução do autor Jonatan Pinsard, grifos do autor Jonatan Pinsard].

A composição de dois rotores, em geral, é um motor. Vetores e rotores podem ser entendidos então como casos particulares dos motores, isto é, um vetor é um motor em que a componente rotacional é nula, e um rotor é um motor em que a componente linear/vetorial é nula. Uma álgebra que descreve os motores (*motors*) é fechada, no sentido de que, diferentemente dos rotores, a composição entre dois motores é sempre um motor (mesmo que seja um motor degenerado em um vetor ou em um rotor).

Nessa primeira seção do artigo, Clifford define assim os rotores e os motores. Na segunda seção, ele prossegue em explorar as relações algébricas entre esses objetos, através de operações sobre quatérnios imaginários.

O objeto que transforma um vetor em outro vetor, como já fora exposto por Hamilton e como é seguido por Clifford, é um quatérnio. Geometricamente, um vetor pode ser transformado em outro por meio de uma rotação seguida de uma homotetia (compressão/dilatação, ou seja, multiplicação por um número real), como representado na figura abaixo.

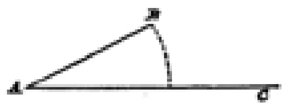

Figura 2. Transformação de um vetor AB em um vetor AC.
Fonte: CLIFFORD [1873, p. 382].

Entretanto, um quatérnio só pode atuar sobre dois vetores que sejam ambos perpendiculares ao seu eixo. Ou seja, qualquer produto de quatérnios imaginários não descreve no caso geral uma rotação. Se a todo produto de vetores é possível associar um quatérnio (rotor), a recíproca não é verdadeira.

Em termos algébricos, o produto de dois quatérnios imaginários não é sempre um quatérnio imaginário. Quando se considera um rotor representado por um quatérnio imaginário, ele só pode ser aplicado em vetores que são perpendiculares a ele, para produzir uma rotação.

Clifford de fato consegue representar uma rotação a partir de um operador que é um quatérnio particular, mas nem todos os quatérnios representam um rotor.

Hamilton já utilizava a multiplicação por quatérnios para representar a rotação [HAMILTON, 1847], mas através de uma operação envolvendo um quatérnios unitário q e seu inverso/conjugado. Dado um vetor v do espaço e um quatérnio unitário q, o vetor v' definido por

$$v' = q \,.\, v \,.\, q^{-1}$$

representa o vetor obtido por uma rotação por um ângulo igual ao dobro do ângulo do quatérnio q[3] [NEVES 2008, p. 90].

3. Mais especificamente, dado um vetor v do espaço, para realizar a rotação em torno da direção de outro vetor α por um ângulo 2a, faz-se a multiplicação (cos a + (sen a) α) v (cos a - (sen a) α). Como α é um vetor do espaço, ele é definido por três coordenadas x, y e z, ou seja, se trata de um quatérnio imaginário. Logo, (cos a + (sen a) α) e (cos a - (sen a) α) representam quatérnios completos em 4 dimensões, sendo um o conjugado do outro.

Entretanto, Clifford não aborda ou sequer menciona essa forma de operar uma rotação por um quatérnio e seu conjugado. De fato, ele tenta representar uma rotação por meio de um único produto, fazendo a razão de dois vetores:

> Esse quatérnio $\frac{AC}{AB} = q$, então, é uma operação, a qual, sendo realizada sobre AB, o converte em AC, de modo que q . AB = AC. O eixo do quatérnio é perpendicular ao plano BAC [Clifford, 1873, p. 383. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Essa forma de empregar a razão entre vetores é problemática devido à não comutatividade dos quatérnios. As multiplicações q . AB ou AB . q conduzem a resultados diferentes, e fazer a razão AC/AB = q não deixa claro se a multiplicação a ser operada se faz à esquerda ou à direita. Isso indica duas possibilidades: Clifford não conhecia essa forma como Hamilton emprega os quatérnios para operar rotações; ou, apesar de conhecer, abriu mão de utilizá-la para criar uma operação única. Em seu trabalho, Clifford pretende fazer corresponder, a cada operação, um objeto algébrico. Assim, razão entre dois vetores do espaço seria igual a um quatérnio.

Para transformar um rotor em outro, entretanto, são necessárias não apenas duas, mas três operações: Uma rotação (para tornar seus eixos paralelos), uma translação (para tornar seus eixos coincidentes) e uma homotetia (para igualar suas magnitudes), já que, diferentemente de um vetor, um rotor tem posição definida, que é dada por seu eixo.[4] A razão entre dois rotores é chamada de *tensor-twist.*[5] Assim como um quatérnion é a razão entre as direções de dois vetores, um *twist* é a razão entre os eixos de dois rotores. Esse problema seria equivalente a transformar um produto vetorial em outro produto vetorial.

Para dar conta da razão de dois motores, Clifford define um operador α que transforma um motor qualquer A em um vetor de translação paralelo ao seu eixo e cuja magnitude é proporcional ao binário associado a A. Isso significa que esse operador transforma uma rotação por um eixo em uma translação pelo mesmo eixo.[6]

Ao operar em um motor, composição de um rotor com um vetor, o operador ϖ transforma a rotação em uma translação e elimina a parte do binário do motor. Ao ser aplicado duas vezes em um motor, então, esse operador o elimina completamente, possuindo assim a propriedade $\varpi^2 = 0$.

4. Um vetor é livre no espaço no sentido de que dois vetores AB e CD paralelos, com mesma magnitude e mesmo sentido são idênticos. Um rotor tem posição definida porque mudar o eixo de um rotor muda de fato o rotor. Dois rotores com mesma magnitude, mesmo sentido e em eixos paralelos, mas não coincidentes, não são idênticos. Isso pode ser interpretado pelas próprias rotações dos corpos no espaço. Duas rotações aplicadas a um corpo por dois eixos paralelos distintos, com mesma magnitude e mesmo sentido de rotação, são diferentes.
5. Um *tensor-twist* é uma translação composta com uma rotação (ou seja, uma torção), sendo a rotação perpendicular aos eixos dos dois rotores, seguida de uma compressão ou dilatação (homotetia), que, algebricamente, é um produto por um escalar. Nos textos de Clifford, a palavra tensor é utilizada como sinônimo de escalar ou número real. Multiplicar por um tensor equivale a multiplicar por um escalar, ou seja, operar uma compressão ou dilatação.
6. Aqui, os cálculos correspondentes a cada operação foram omitidos devido à limitação de espaço neste trabalho.

Ronney [2008] aponta que esse operador ficou conhecido como *operador dual*, já que transforma uma rotação em uma translação. A razão entre dois motores genéricos é a soma de um *tensor-twist* com o produto de um quatérnio pelo operador ϖ, assumindo a forma

$$\frac{B}{A} = t + \varpi q$$

Essa combinação de um tensor-torção com o produto de um quatérnion pelo operador ϖ define um novo tipo de objeto, chamado por Clifford de *Biquaternion*. Fechando essas duas primeiras seções, o autor apresenta a seguinte tabela, que resume os resultados obtidos e os significados dos objetos definidos e as operações entre eles.

Geometrical Form	*Quantity*	*Example*	*Ratio*
Sense en st. line	Vector en st. line	Addition or Subtraction	Signed Ratio
Direction in plane	Vector in plane	Complex quantity	Complex Ratio
Direction in space	Vector in space	Translation, Couple	Quaternion
Axis	Rotor	Rotation-Velocity, Force	Twist
Serew	Motor	Twist-Velocity, System of Force	Biquaternion

Figura 3. Resumo das duas primeiras seções do preliminary sketch of biquaternions.
Fonte: Clifford [1873, p. 387].

Enquanto Clifford consegue representar todo movimento do espaço a partir do produto por quatérnio (e por biquatérnio), ele não atribui significado a qualquer multiplicação por quatérnio (ou biquatérnio). De fato, ele utiliza apenas um subconjunto da álgebra de quatérnios e biquatérnios para lidar com os movimentos de um corpo rígido no espaço. Além disso, essas quantidades são aplicáveis tanto na cinemática (ao tratar de velocidades de rotação e velocidades de translação) quanto na dinâmica (ao tratar de forças e momentos) e Clifford passa livremente de um registro a outro sem apontar isso.

Algumas interpretações das ideias envolvidas nos conceitos de rotor e motor podem ser feitas à luz dos conceitos modernos. Um espaço vetorial é um conjunto, cujos elementos são vetores, nos quais se define uma soma (entre os vetores) e a multiplicação por um escalar (um elemento pertencente a um corpo, geralmente o corpo dos números reais). Ao definir um produto entre dois vetores, o espaço munido desse produto forma uma álgebra. Entretanto, o produto entre dois vetores não é outro vetor. No caso do produto escalar (ou produto interno) e do produto vetorial, o primeiro resulta em um escalar e o segundo é anti-comutativo e tem algumas limitações, como estar definido apenas em R^3. Também não é possível efetuar a divisão entre dois vetores.

O momento angular de uma partícula é definido como o produto vetorial do vetor posição da partícula por seu momento linear/sua quantidade de movimento. O rotor pode ser interpretado então como o produto vetorial de dois vetores de naturezas distintas. Entretanto, como presente no próprio texto de Clifford, existe uma polissemia para esse objeto, já que ele pode significar tanto o momento de uma força em relação a um eixo quanto uma velocidade de rotação em torno de um eixo. Ademais a razão entre dois motores resulta sempre em um biquatérnion, mas não fica claro se todo biquatérnion representa a razão entre dois motores.

3.2. As três últimas seções - o espaço elíptico

Na terceira seção, Clifford leva os conceitos introduzidos para o espaço elíptico. Para isso, ele segue as abordagens de Cayley e Klein, começando com uma geometria mais geral, a geometria projetiva, e definindo a partir dela uma métrica, o que conduz às geometrias parabólica (euclidiana), hiperbólica e elíptica, conforme a divisão feita por Felix Klein [1871]. Especificamente, nessa seção ele introduz a teoria dos rotores e dos motores no espaço elíptico, definindo alguns termos básicos e elucidando algumas propriedades essenciais desse espaço, como a relação de polar e polo.

Ao definir uma métrica a partir do espaço projetivo, seguindo Cayley, ele parte da noção de pontos ao infinito. Todas as propriedades métricas serão definidas em relação a uma forma quadrática fixa, chamada *Absoluta*. Ou seja, a *Absoluta* determina a métrica do espaço. Há três casos de importância especial que surgem quando a *Absoluta* é uma quádrica, sendo definida por uma equação (ou conjunto de equações) do segundo grau, cujas métricas dão origem a três geometrias, chamadas Elíptica, Hiperbólica e Parabólica (que coincide com a geometria euclidiana). Esses casos são abordados por Klein [1871]:

(1) Elíptica: Todos os elementos da *Absoluta* são imaginários

(2) Hiperbólica: A *Absoluta* não contém nenhuma reta real, e "nos envolve". Pontos situados no outro lado da superfície são chamados pontos ideais.

(3) Parabólica: A superfície se degenera em uma cônica imaginária em um plano real.

No caso da geometria euclidiana (parabólica), toda circunferência real corta a reta no infinito em dois pontos imaginários - os pontos circulares no infinito de Poncelet. No caso do espaço, toda esfera corta o plano no infinito em uma cônica imaginária. Essa cônica é a Absoluta no caso da geometria parabólica. Clifford [1865] fala sobre esse caso no artigo *Analytical Metrics*, escrito em 1864 e publicado em 1865:

> Poncelet mostrou que todos os círculos passam pelos mesmos dois pontos no infinito, e que todos os ângulos, comprimentos, etc. podem ser expressos como funções gráficas desses dois pontos. Por exemplo, o ângulo entre duas retas é uma certa função da razão anarmônica em que elas cortam a reta que une os pontos circulares. O princípio geral pode ser assim declarado: Sempre que falamos das propriedades métricas de lugares, consideramos os lugares, não por si mesmos, mas em conexão com outro lugar fixo, chamado o Absoluto. Assim, no caso da Geometria Plana, o Absoluto são os dois pontos circulares no infinito. [Clifford, 1865, pp. 54,55. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Ainda em relação a essas três possibilidades, Henry Smith diz [em Clifford, 1882]:

> (1) a Absoluta é uma quádrica imaginária, (2) a Absoluta é uma quádrica umbilical real (ou seja, uma quádrica sem linhas retas reais) e o espaço con - siderado é interno à quádrica, (3) a Absoluta é uma quádrica imaginária que degenerou em uma seção cônica ao perder uma de suas dimensões. Destas três hipóteses, a última corresponde à concepção ordinária do espaço: os espaços caracterizados pelas suposições (1) e (2) foram denominados respectivamente de elíptico e hiperbólico pelo professor Klein, que conseguiu mostrar que em cada um deles a curvatura é constante, sendo positivo no espaço elíptico e negativo no espaço hiperbólico (p. xlvii).

Na geometria elíptica, essa quádrica é imaginária, porque todos os pontos do espaço elíptico estão disponíveis: a geometria elíptica opera sobre todo o espaço projetivo. Todos os axiomas da geometria projetiva valem também na geometria elíptica. Ou seja, para obtê-la a partir da geometria projetiva, basta definir uma métrica.

Fazendo analogia com o caso bidimensional, é possível comparar a geometria elíptica plana com a geometria de pontos sobre uma esfera, uma superfície bidimensional que pode ser imaginada do espaço euclidiano tridimensional. Cada ponto da esfera sendo associado a uma coordenada (x, y, z).

Após isso, ele define o espaço elíptico como um espaço em que todas os pontos podem ser associados a três coordenadas x, y e z, e a todo sistema de três coordenadas é possível associar um ponto, sem exceções. Para estabelecer a métrica, ele define uma quádrica imaginária, em relação à qual será definida a métrica por meio da *razão cruzada*.[7] Todos os pontos pertencentes a essa quádrica, bem como os planos tangentes a ela, têm coordenadas imaginárias, portanto não são elementos ordinários do espaço.

Nesta subseção, Clifford faz uma definição para o que ele chama de "retas paralelas", em um sentido particular. A partir dessa ideia de retas "paralelas", é possível construir uma superfície de curvatura nula no espaço elíptico. Dadas duas retas quaisquer, existem, no geral, duas retas perpendiculares a ambas, e essas são polares uma da outra. Portanto, uma reta pode ser convertida em outra por meio de rotações em torno de dois eixos polares, sendo esses eixos determinados como retas que cortam ambas as retas e suas polares (portanto são perpendiculares a ambas). Se passarmos continuamente por pontos de uma das retas, traçando por esses pontos perpendiculares à outra, um dos eixos determinará a menor distância entre essas retas, e o outro a maior distância. Se essas distâncias forem iguais, então as retas são equidistantes por todos os pontos.

Essa noção de paralelismo de Clifford envolve a esfera S^3 que é em 4 dimensões,[8] e que pode ser definida como o conjunto de todos os quatérnios cujo módulo é igual a 1. Como o espaço é em dimensão 4, é possível tomar 4 vetores como base, dois a dois linearmente

---

7. Livros de geometria projetiva em inglês costumam usar o termo "cross ratio", enquanto livros de geometria em francês costumam utilizar o termo "birapport", cuja tradução literal é dupla razão, como em Siddler (2000). De qualquer forma, dados quatro pontos pertencentes à mesma reta, é possível definir essa razão cruzada entre eles. Dualmente, é possível definir a razão cruzada entre quatro retas concorrentes num mesmo ponto. A razão cruzada é um invariante na geometria projetiva, e é por meio dela que é definida uma métrica. No espaço, também é possível definir a razão cruzada entre quatro planos concorrentes. Ao utilizar um sistema de coordenadas, a dupla razão fica em função das coordenadas de cada ponto (ou reta, ou plano). Entretanto, independentemente do triângulo de referência (no plano, para estabelecer um sistema de coordenadas, é necessário tomar três pontos distintos como referência) ou do tetraedro de referência (no espaço, são necessários quatro pontos distintos para formar um sistema de coordenadas), a razão cruzada se mantém invariante.
8. Uma reta elíptica é similar a uma circunferência euclidiana, que, apesar de ter dimensão 1, deve estar contida em um plano, cuja dimensão é 2. Uma esfera, superfície de 2 dimensões, deve estar contida no espaço em 3 dimensões. A esfera S^3 seria a generalização da esfera S^2 com uma dimensão a mais, portanto somente seria possível imaginá-la num espaço euclidiano de dimensão 4.

independentes. É possível então formar 2 pares de vetores, os quais cada um de um par não tem interseção com o outro par. Então, na esfera S^3, diferentemente de S^2 , existem grandes círculos que não têm ponto em comum. Esse paralelismo de Clifford generaliza, de certa forma, o trabalho de Cayley. Cayley utiliza como modelo de geometria elíptica a esfera S^2. Clifford é, talvez, o primeiro estudar a geometria elíptica no espaço S^3. São retas que não se encontram e têm uma distância definida entre as duas retas pela perpendicular que intercepta ambas. Nesta parte, a parte mais original de Clifford é pensar a geometria elíptica em 4 dimensões.

Clifford ressalta que um hiberbolóide é uma superfície duplamente regrada. Então, é possível obter um hiperbolóide a partir de dois conjuntos independentes geradores de retas, sendo estas as geratrizes do hiperboloide.

Existe um caso excepcional em que as duas retas e suas polares pertencem ao mesmo conjunto de geradores de um hiperbolóide as retas sendo equidistantes ao longo de todo seu comprimento e cortando os mesmos dois geradores de um sistema da *Absoluta*. Duas retas desse tipo são definidas por Clifford como retas paralelas, podendo ser *paralelas à direita* ou *paralelas à esquerda*, de acordo se são convertidas uma na outra por uma *torção à direita* ou por uma *torção à esquerda*. Dada uma reta, é possível construir, por um ponto qualquer, uma paralela à direita e uma paralela à esquerda a ela, sendo que o ângulo entre elas é o dobro da distância do ponto à reta.

As paralelas assim definidas têm várias propriedades análogas às retas paralelas da geometria parabólica. Se uma reta qualquer corta duas paralelas, ela forma ângulos iguais com ambas. Uma série de retas paralelas cortando uma reta dada formam uma *superfície regrada de curvatura nula*.[9] A geometria dessa superfície é idêntica à geometria de um paralelogramo cujos lados opostos são iguais. Vale destacar que Coxeter [1998] explora essa definição particular de Clifford para retas paralelas no espaço elíptico, e a partir delas estuda as rotações à direita e rotações à direita nesse espaço, investigando também as propriedades dessa superfície de curvatura nula gerada pelas retas paralelas que cortam uma reta dada.

Após isso, Clifford segue em explorar a teoria dos rotores e motores no espaço elíptico. Como um movimento de translação ao longo de um eixo pode também ser visto como um movimento de rotação pelo eixo polar. Em relação a esses movimentos, é válido perceber que a geometria do espaço elíptico é similar, em vários sentidos, à geometria de uma reta elíptica (unidimensional), já que espaços projetivos de dimensão ímpar são orientáveis, enquanto espaços projetivos de dimensão par são não-orientáveis (um plano projetivo, por exemplo, não é orientável).

Na geometria de uma reta elíptica, toda isometria pode ser obtida por uma rotação. Dada a dualidade do espaço elíptico, uma translação pode ser associada a uma rotação e vice-versa, assim como distâncias são associadas a ângulos dualmente. Como o dual de uma

9. *Ruled Surface of zero curvature.*

reta é também uma reta, sua reta polar (retas são objetos auto-duais no espaço elíptico), uma translação por um eixo pode ser associada a uma rotação pelo eixo polar.

Uma velocidade de torção, composição de uma translação com uma rotação, pode ser vista como a composição de duas velocidades de rotação cujos eixos são polares um do outro. Se as rotações têm magnitudes θ e ϕ, respectivamente, então o movimento pode ser visto como uma velocidade de torção pelo primeiro eixo e com *passo* igual a $\frac{\theta}{\phi}$ ou pelo segundo eixo e com passo igual a $\frac{\phi}{\theta}$.

Então um motor tem, no caso geral, dois eixos e pode ser expresso de maneira única como a soma de dois rotores (cujos eixos são) polares. Entretanto, se as magnitudes forem iguais (e, portanto, o *passo* do motor for igual a 1), os eixos ficam indeterminados. O autor explica esse caso no seguinte trecho:

> Se um corpo rígido receber ao mesmo tempo uma rotação em torno de um eixo e uma translação igual ao longo dele, todos os pontos do corpo descreverão retas paralelas; e o movimento do corpo é ao mesmo tempo uma rotação em torno de qualquer uma dessas retas combinada com uma translação igual ao longo dela. Tal movimento pode ser adequadamente representado por uma reta de determinado comprimento traçada através de qualquer ponto paralelo a uma dada reta. [Clifford,1873, p. 390. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Um *motor* de passo unitário, ou seja, que é o seu próprio polar, tem a natureza de um vetor. É possível definir então um vetor como um motor cujos eixos são indeterminados, e esse é o único caso de indeterminação que ocorre na geometria elíptica. Um vetor pode ser chamado *destro* ou *canhoto* se a *torção* induzida por ele é à direita ou à esquerda.

Após esse esboço, Clifford termina essa seção com o resultado de que todo motor pode ser obtido como a soma de um vetor destro com um vetor canhoto. De fato, se A e A’ são motores polares, temos que A= ½(A + A’) + ½(A – A’). Ambos A + A’ e A – A’ são motores de passo unitário (portanto vetores), sendo um destro e um canhoto.

Na coletânea de artigos de Clifford, Henry Smith mostra uma carta que Ball escreveu para ele, em relação aos resultados contidos no *Preliminary Sketch of Biquaternions*:

> Acho que seria bom acrescentar uma ou duas linhas com vistas a trazer à tona a concepção de Clifford do ‘vetor’ no espaço elíptico. Um ‘vetor direito’ é o resultado de duas rotações iguais sobre um par de polares conjugados em relação ao absoluto; um ‘vetor esquerdo’ é o resultado de duas rotações iguais e rotações opostas em torno de um par de polares conjugados. Clifford mostra lindamente que essa é a generalização legítima do vetor hamiltoniano e enuncia o esplêndido teorema de que qualquer motor deve ser, de certa forma, a soma de um vetor direito e um vetor esquerdo. [Clifford, 1882, p. LXVI. Tradução do autor Jonatan Pinsard].

Uma vez feita a contextualização no espaço elíptico e definidos alguns conceitos básicos, ele introduz um sistema de três rotores unitários passando pela origem, que é um ponto do espaço escolhido arbitrariamente (Fig. 4). Dadas três retas quaisquer, perpendiculares entre si e se intersectando na origem, sejam os rotores unitários i, j, k cujos eixos são essas três retas. Qualquer rotor passando pela origem pode ser expresso pela soma $ix + jy + kz$, onde x, y e z são escalares (numa linguagem moderna, como combinação linear dos rotores canônicos).

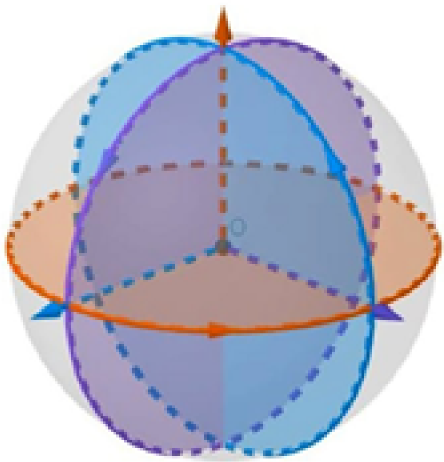

Figura 4. Rotores ortogonais passando pela origem.
Fonte: Elaborada por um dos autores (J.P.) pelo software geogebra.

Na álgebra linear atual, qualquer vetor do espaço euclidiano pode ser obtido como combinação linear de três vetores linearmente independentes e, particularmente, de três vetores ortogonais unitários. Cada vetor representa uma direção. Os três eixos perpendiculares indicam as direções desses vetores. No caso dos rotores, os eixos representam não a direção do rotor, mas seu eixo de rotação. O rotor cujo eixo é o eixo azul (figura 4) representa uma rotação por aquele eixo, e não uma translação ao longo dele, como seria o caso de um vetor.

Quando os rotores passam pela origem, eles satisfazem as equações $i^2 = j^2 = k^2 = \text{ilk} = -1$, que são as regras das operações dos quatérnions. Uma interpretação geométrica sobre essas propriedades pode ser feita, similar àquela frequentemente associada aos números complexos. Pensando em um rotor unitário como i, j, e k definidos acima, se cada um deles realiza uma rotação de 90° em torno de seu eixo, então aplicá-los duas vezes seguidas significa uma rotação de 180° em torno do eixo, o que equivale a uma reflexão. Portanto multiplicar um rotor α por i^2 por exemplo, significa tomar o rotor $-\alpha$, com mesma direção e magnitude, mas sentido contrário. Sendo assim, nesse sistema composto de três rotores ortogonais passando pela origem, os rotores comportam-se de maneira similar aos quaternios.

A razão entre dois rotores que não se intersectam é um *twist*, que tem eixos perfeitamente definidos. Entretanto, se os rotores forem polares um do outro, esses eixos ficam indeterminados já que, qualquer reta que os intersecta é perpendicular a ambos e, portanto, serve como eixo. Sendo assim, sempre é possível encontrar uma torção que converte, simultaneamente, dois rotores em seus polares. Além disso, duas torções com *passos* iguais a 1 ou –1 têm um par de rotores nos quais podem operar e que levam um no outro. (Dados dois rotores polares, qualquer reta que os intersecta é perpendicular ao eixo de ambos). Então, todas as torções que possuem como eixo uma dessas retas e cujo *passo* é igual a 1 ou –1 têm o mesmo efeito: Converter um rotor no outro. Clifford anuncia o resultado:

"Todas as torções retangulares de passo 1 são equivalentes; e todas as torções retangulares de passo –1 são equivalentes." [CLIFFORD, 1873, p. 391].

Sendo assim, as torções retangulares de *passo* 1 serão denotadas pelo símbolo ϖ e, dado um rotor a, a operação ϖ a produz o rotor polar ao rotor a, com mesma magnitude e sentido, obtido por uma torção à esquerda. Aplicar essa torção de passo unitário duas vezes ao mesmo rotor o transforma em si mesmo (ou seja, é a identidade), então temos a propriedade

$$\varpi^2 = 1$$

Clifford utiliza o mesmo símbolo ϖ para expressar o operador dual, apesar de, nesse contexto, revestir um significado diferente. No caso do espaço euclidiano padrão, para transformar uma rotação numa translação (os dois tipos de isometrias no espaço, que compõe o movimento geral de um corpo), esse operador transforma a parte MOMENTO de um motor em um vetor cuja magnitude fosse proporcional ao módulo do rotor. No caso do espaço elíptico, basta transformar um rotor no seu vetor polar, já que toda rotação por um eixo pode ser expressa como uma translação pelo eixo polar. Esse novo significado confere ao operador a propriedade $\varpi^2 = 1$, conferindo a ele a propriedade de ser involutivo, diferentemente da propriedade $\varpi^2 = 0$ obtida para o espaço euclidiano.

A partir disso, Clifford cria dois operadores ortogonais entre si a partir de ϖ, sendo estes

$$\xi = \frac{1+\varpi}{2} \text{ e } \eta = \frac{1-\varpi}{2}$$

Mostrando (em alguns passos de álgebra básica) que eles têm as propriedades

$$\xi^2 = \xi \;\; ; \;\; \eta^2 = \eta \quad \text{e} \quad \xi\eta = 0$$

Ou seja, tendo essas propriedades, esses operadores são projeções (ao projetar um vetor em um plano, a projeção da projeção não muda). De fato, estes operadores representar a projeção sobre o espaço esquerdo e o espaço direito, respectivamente.

A partir desses operadores definidos, Clifford conduz novamente para o resultado, agora no espaço elíptico, de que a razão entre dois motores é um biquatérnio.

Na última seção, ele apenas obtém alguns resultados elementares sobre rotores e motores no espaço elíptico. Estes são: Rotor posição de um ponto; equação de uma reta; Rotor ao longo de uma reta cuja equação é dada; Rotor ligando dois pontos cujos rotores-posição são dados e Rotor paralelo a outro rotor passando por um ponto cujo rotor posição é dado. Não é introduzido nenhum outro conceito. Os detalhes desta última seção não serão explorados neste artigo.

4. CONCLUSÕES

Clifford não consegue fechar completamente sua álgebra. A álgebra completa seria formada por todos os biquatérnios, não apenas por aqueles em que os quatérnios que compõe um biquatérnio são imaginários. Ele não consegue dar significado físico para todos os biquatérnios. Apesar de toda razão entre motores ser representada por um biquatérnio, nem todo biquatérnio representa tal razão. De fato, não é atribuído nenhum significado, seja cinemático, dinâmico ou geométrico a esses outros biquatérnios.

Mas o artigo é talvez o primeiro a tentar encontrar uma álgebra que desse conta dos deslocamentos de um corpo sólido, dos parâmetros cinemáticos (velocidades de translação e de rotação), e por fim da dinâmica dos corpos sólidos (resultante das forças e binários) e momentos cinéticos. Outro aspecto inovador consiste em considerar a necessidade de se situar num espaço elíptico para dar conta do movimento dos corpos sólido. Aliás, é talvez um dos primeiros textos onde consta um estudo do espaço elíptico de três dimensões utilizando a definição de Cayley, pois Cayley tinha se restringido a considerar o plano elíptico.

Posteriormente, Clifford escreve novos textos desenvolvendo essa álgebra, a saber, *Further Notes on Biquaternions* [1876, não publicado], *On the Theory of Screws in a Space of Constant Positive Curvature* (não publicado), *On the Classification of Geometric Algebras* [Clifford, 1876] e *Aplications of Grassmann Extensive Algebra* [1878], em que ele leva em conta também a multiplicação polar de Grassman, unindo o produto exterior de Grassmann com os quatérnios.

Mas, de fato, ele não conseguiu atribuir a cada elemento de sua álgebra um significado físico. Nestes últimos textos, entretanto, após ter conhecimento do *Ausdehnungslehre* [Grassmann, 1862], Clifford apresenta uma generalização das álgebras de Grassmann. O *Preliminary Sketch of Biquaternions*, pode assim ser considerado como o primeiro passo no processo de elaboração das álgebras geométricas por Clifford.

Literatura

Ball, Robert Stawell (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge, Cambridge University Press.

Ball, Robert Stawell (1871) "The Theory of Screws a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a Riyid Body. First memoir". *Transactions of the Royal Irish Academy*, *25*, 137-217.

Ball, W.W.R. (1889) *A History of the Study of Mathematics in Cambridge*. 1ª edição. Cambridge, Cambridge University Press.

Cayley, Arthur (1859) "A Sixth Memoir Upon Quantics. Philosophical". *Transactions of the Royal Society of London*, *149*, 61-90.

Coxeter, Harold Scott MacDonald (1998) *Non Euclidean Geometries*. 6ª edição. Washington, D.C., The Mathematical Association of America.

Clifford, William Kingdon (1864) "Analogues of Pascal's Theoreme". *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, *23*, 216-222.

Clifford, William Kingdon (1865) "Analytical Metrics". *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 29, 30*. Em: *Clifford Mathematical papers*, 1882, 80-109.

Clifford, William Kingdon (1878) "Applications of Grassmann's Extensive Algebra". *American Journal of Mathematics*, *1*, 350-358.

Clifford, William Kingdon (1879) *Lectures and Essays*. Vol. I & II. 1ª edição. New York, Macmillan and Co.

Clifford, William Kingdon (1882) *Mathematical papers*. London, Macmillan and Co.

Clifford, William Kingdon (1863) "On Jacobians and Polar Opposites". *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, *2*, 229-239.

Clifford, William Kingdon (1865) "On Triangular Symmetry". *Mathematics from the Educational Times, 4*, 88-89.

Clifford, William Kingdon (1866) "On the general theory of anharmonics". *Proceedings of the London Mathematical Society, 1(1)*, 3-6.

Clifford, William Kingdon (1867) "On the Principal Axes of a Rigid Body". *The Messenger of Mathematics*, *4*, 78-81.

Clifford, William Kingdon (1873) "Preliminary Sketch of Biquaterions". *Proceedings of the London Mathematical Society*, *4*, 381-395.

Clifford, William Kingdon (1878) "Remarks on the Chemico-Algebraical Theory". *American Journal of Mathematics, Pure and Applied*, *1(2)*, 126-128.

Dias, Leandro Silva (2023) *As Métricas de Cayley e os seus Desdobramentos (1857-1895)*. [Tese de doutorado] Orientador: Gérard Émile Grimberg. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Doran, Chris e Lasenby, Anthony (2003) *Geometric Algebra for Physicists*. 1ª edição. Cambridge, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511807497>

Dorst, Leo; Doran, Chris e Lasenby, Joan (eds.) (2002) *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*. Boston, MA, Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0089-5>

Dorst, Leo; Fontijne, Daniel e Maan, Stephen (2007) *Geometric Algebra for Computer Science*. Amsterdam, Elsevier.

Forfar, D.O. (1996) "What Became of Senior Wranglers?" *Mathematical Spectrum*, *29*, 1-4.

Grassmann, Hermann (1862) *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet.* Berlin, Enslin.

Klein, Felix (1871) "Sur la géométrie dite non euclidienne". *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, *2*, 341-351.

Hamilton, William Rowan (1847) "On Quaternions". *Proceedings of the Royal Irish Academy*, *3*, 1-16.

Hamilton, William Rowan (1853) *Lectures on Quaternions*. 1ª edição. Dublin, Hodges & Smith.

Hestenes, David (1999) *New Foundations for Classical Mechanics*. 2ª edição. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Lipkin, H. e Duffy, J. (2002) "Sir Robert Stawell Ball and methodologies of modern screw theory". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, *216(1)*, 1-11. <https://doi.org/10.1243/0954406021524828>

Neves, Robson Coelho (2008) *Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço*. Dissertação de mestrado defendida pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) da UFRJ.

Rooney, Joseph (2007) "William Kingdon Clifford (1845-1879)". Em: Marco Ceccarelli (ed.) *Distinguished figures in mechanism and machine science: Their contributions and legacies. History of mechanism and machine science*. Dordrecht, Springer, 79-116.

Salmon, George (1852) *A Treatise on the Higher Plane Curves*. Dublin, Hodges and Smith.

Salmon, George (1855) *A Treatise on Conic Sections*. 3ª edição. Dublin, University Press.