ERATÓSTENES DE CIRENE, GEÓMETRA Y GEODESTA

Eratosthenes of Cirene, geometer and geodesist

José María Ayerbe Toledano
Universidad de Sevilla
ORCID: 0000-0002-4973-2240

Resumen

Eratóstenes de Cirene fue uno de los científicos más destacados de la Antigüedad, realizando notables contribuciones en diferentes disciplinas. En este artículo se analizan sus dos aportaciones más destacadas, un procedimiento mecánico para la resolución del problema de la duplicación del cubo y la primera medida del meridiano terrestre, en las que brilla primero como geómetra y después como geodesta. En el trabajo se estudia críticamente la aportación realizada por Eratóstenes para la resolución del primero de los problemas mencionados, evaluando las dos fuentes antiguas disponibles e incidiendo en los aspectos históricos asociados a este descubrimiento. Asimismo, se revisa su medida del meridiano terrestre, un hito científico por el que es universalmente admirado y sobre cuya exactitud hay en la actualidad, como pretendemos poner de manifiesto, más incertidumbre que certeza.

Abstract

Eratosthenes of Cyrene was one of the most prominent scientists of Antiquity, making notable contributions in different disciplines. This paper analyzes his two most notable contributions, a mechanical procedure for solving the problem of doubling the cube and the first measurement of the terrestrial meridian, in which he shines first as a geometer and then as a geodesist. The article critically studies the contribution made by Eratosthenes to the resolution of the first of the mentioned problems, evaluating the two available ancient sources and focusing on the historical aspects associated with this discovery. Likewise, his measurement of the terrestrial meridian is reviewed, a scientific milestone for which he is universally admired and about whose accuracy there is currently, as we intend to show, more uncertainty than certainty.

Palabras clave: Geometría, geodesia, Grecia, Eratóstenes

Keywords: Geometry, geodesy, Greece, Eratosthenes

Recibido: 18/11/2024 – Aceptado: 22/04/2025
https://doi.org/10.47101/llull.2025.48.96.ayerbe

1. Introducción

El problema de la duplicación del cubo, también conocido como del mesolabio o de Delos como veremos más adelante, estudia la forma de construir, empleando únicamente rectas y circunferencias, un cubo de volumen doble al de uno dado. La orientación geométrica que desde una etapa muy temprana adoptó la matemática griega, como consecuencia de la irrupción de las magnitudes inconmensurables y de las dificultades observadas en el tratamiento del infinito, hizo que este problema, junto con los de la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo, estuviera ya explícitamente planteado en el siglo V a.C.

Es posible que la exigencia de la utilización exclusiva de la regla y el compás no se considerara desde el principio y suele atribuirse a Platón la imposición de este requisito, que fue el que hizo que los tres problemas fueran de imposible solución. No obstante, estos problemas, que hoy conocemos como los tres problemas clásicos de la geometría griega, actuaron como verdaderos catalizadores de la investigación en esta etapa, lo que permitió a los grandes matemáticos helenos encontrar numerosas respuestas a los mismos superando los rígidos moldes impuestos por el platonismo y aceptando, en consecuencia, construcciones en las que otras curvas, además de las rectas y las circunferencias, podían ser consideradas.

La aportación de los matemáticos griegos a la resolución del problema de la duplicación del cubo se ha preservado en dos fuentes fundamentales, la *Colección Matemática* de Papo de Alejandría y los *Comentarios* de Eutocio al Libro II de la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro*. En ambas fuentes se recoge la propuesta de Eratóstenes para la solución de este problema, pero la segunda, más extensa y detallada, recoge también la historia del problema y constituye un documento de valor incalculable dada la habitual escasez de información directa que nos ha llegado de la geometría helena.

Eratóstenes fue sin duda uno de los genios más relevantes que produjo la cultura griega y en su día, dada la posición que ocupó como preceptor del hijo del rey y director de la Biblioteca de Alejandría, debió de ser una persona enormemente influyente. En la *Suda*,[1] una enciclopedia histórica bizantina de alrededor del siglo X, se recoge que fue apodado "Beta" (o número dos, medallista de plata o subcampeón) debido a que ocupaba el segundo lugar en todas las ramas del saber respecto a los que habían alcanzado el nivel más alto. Otros, incidiendo en esta misma idea, afirman que se le aplicaba el apelativo de "Pentathlos" en el sentido de que era como un atleta de pentatlón, muy completo en todas las disciplinas, aunque en cada una de ellas en particular no fuera el mejor. Finalmente se señala, en términos todavía más elogiosos, que fue considerado un segundo o nuevo Platón si bien como veremos, lejos de deleitarse en la pureza abstracta de la geometría como perseguía el filósofo ateniense, se interesó siempre por las aplicaciones de la ciencia al mundo real.

El objeto de este artículo es valorar la obra de Eratóstenes en sus vertientes de geómetra y geodesta, a través del estudio de sus dos aportaciones fundamentales en estos campos.

1. *Suda* on line http://www.stoa.org/sol/.

Después de realizar en la segunda sección un breve recorrido por su vida y su obra, en la tercera sección se analiza su trabajo en relación con el problema de la duplicación del cubo, a partir de la evaluación crítica de las dos fuentes mencionadas en las que se recoge su aportación. Finalmente, en la cuarta sección se revisa su hazaña científica más destacada, aquella por la que es universalmente recordado y admirado, el ingenioso procedimiento por el que logró medir la longitud de la circunferencia terrestre que se ha preservado con bastante detalle en una obra de Cleomedes, un astrónomo y filósofo estoico posterior en unos trescientos años a nuestro protagonista. En esta revisión se incide especialmente en la corrección técnica del resultado, bajo las hipótesis que se dieron por admitidas, y la difícil determinación de su exactitud debido esencialmente a las incertidumbres en torno a la longitud de la unidad de medida utilizada, el estadio.

2. Algunas notas Sobre la vida y la obra de Eratóstenes

Como sucede con la mayor parte de los científicos de la Antigüedad, de la vida de Eratóstenes poseemos muy pocos datos directos y los principales hitos de la misma han debido ser reconstruidos a partir de las observaciones proporcionadas por otros autores en diferentes obras, apuntes no siempre coincidentes pero que han servido a los historiadores de la ciencia para desarrollar un bosquejo coherente del devenir vital de esta mente universal. Con objeto de situarlo en el tiempo y en el espacio debe señalarse que, según se recoge en la *Suda,* nació en Cirene (hoy Libia) en la 126ª Olimpiada y se dejó morir de hambre a los ochenta años debido al deterioro de su vista. Según estos datos debió nacer en torno al año 275 a.C. y su muerte tendría lugar hacia el año 195 a.C. En este sentido se señala en [Proclus, 1970, Comentario 69, p. 57] que Eratóstenes y Arquímedes eran contemporáneos, lo que corrobora las fechas que acabamos de indicar.

Invocando de nuevo la autoridad de la *Suda* debe señalarse que era hijo de Aglao (o quizás Ambrosio) y recibió una esmerada educación desde su juventud. Aún en su ciudad natal fue discípulo del filósofo Aristón de Quíos, del gramático Lisanias de Cirene y del poeta Calímaco. Posteriormente, quizás sobre el año 255 a.C. o incluso antes, se trasladó a Atenas, que seguía conservando en aquella época su condición de epicentro y faro de la cultura griega, para completar su formación y dar satisfacción así a su curiosidad y creatividad inagotables en amplios campos del saber.

En los aproximadamente quince años que pasó en Atenas frecuentó las diferentes escuelas filosóficas, entre las que seguían activas la Academia y el Liceo creados por Platón y Aristóteles respectivamente, y debió destacar sobremanera, tanto como para que se fijara en él Ptolomeo III Evergetes y lo llamara a Alejandría para hacerse cargo de la educación de su hijo Filopator. Alejandría, con sus dos instituciones académicas emblemáticas, el Museo y la Biblioteca, disputaba ya a Atenas su condición de capital cultural del helenismo y estaba provocando, bajo la protección y el auspicio de la dinastía ptolemaica, un desplazamiento hacia Egipto de las élites intelectuales del mundo griego.

En Alejandría encontró Eratóstenes el ambiente ideal para desarrollar sus múltiples inquietudes tanto literarias como científicas. Está documentado que fue director de la Biblioteca durante más de cuarenta años [Aujac, 2001, p. 16], dirigiéndola después de Apolonio de Rodas y cediendo el testigo al morir a su discípulo Aristófanes de Bizancio. En este puesto tuvo acceso de primera mano a sus inmensos fondos bibliográficos, lo que le permitió satisfacer sus ansias de conocer e indagar. Sobre el número de volúmenes que contendría la Biblioteca de Alejandría hay bastante incertidumbre. En diferentes fuentes antiguas se estimó que las obras allí contenidas superaban las 500.000 [ver referencias en Estrugas, 2005, p. 5], pero estudios recientes, fundamentados en el volumen ocupado por los rollos y papiros, los contenedores en los que se disponían y las posibilidades de las edificaciones, reducen este número a una décima parte [ver Escolar, 2001, pp. 130-138 o Bagnall, 2002, pp. 354-356].

En el área de la geometría nos han llegado referencias muy precisas de su contribución al problema de la duplicación del cubo, que trataremos en la siguiente sección de este artículo y, en el campo de la aritmética, su famosa criba para encontrar números primos. Según se señala en [Heath, 1981, Vol. II, p. 105] también escribió un trabajo independiente titulado *Sobre medias* que fue lo suficientemente importante como para que algunos siglos después Papo lo mencionara, junto con tratados de Euclides, Aristeo y Apolonio, en el Libro VII de la *Colección Matemática*, obra que hoy denominamos con frecuencia el *Tesoro del Análisis*. Que gozó de un amplio reconocimiento como matemático en su tiempo lo señala el propio Arquímedes que le dedicó dos de sus trabajos, concretamente el *Método* y el *Problema de los bueyes*[2], con objeto de que los hiciera circular entre sus colegas alejandrinos. Así, en la carta que antecede al primero de los tratados mencionados, Arquímedes escribe [Arquímedes, 2009, p. 274 (II, 428, 18-21)] que se dirige a él en su condición de estudioso que destaca considerablemente en filosofía y que aprecia la investigación matemática cuando es el caso.

Pero sin duda en los campos donde más destacó Eratóstenes fue en los de la geografía y la geodesia, ámbito del saber este último donde pudo beneficiarse de sus amplios conocimientos geométricos para profundizar más allá que sus predecesores. La denominación "Beta" no hace justicia a la labor de Eratóstenes que fue sin duda el más destacado de su tiempo en estas áreas. Su obra geográfica se plasmó en el tratado *Geografía*, hoy perdido como toda su producción científica, pero del que tenemos muchas referencias en los compendios de autores posteriores, fundamentalmente de Estrabón. Según se señala en [Aujac, 2001, pp. 51-52] el objetivo esencial de Eratóstenes, que fue el primero en esta materia, "est de donner une vision cohérente et précise du monde connu à la surface du globe terrestre, de la traduire par une carte qui soit autant que posible <<à l'échelle>>, et de faire de cette carte une image du monde habité lisible par tous". En este marco debe encuadrarse su tratado *Sobre la medida de la tierra* en el que realiza el cálculo de la longitud de la circunferencia de nuestro planeta que revisaremos en la última sección.

2. No siempre ha sido aceptada la autoría de Arquímedes de este compendio. Una discusión sobre este particular puede encontrarse en [Arquímedes, 2009, pp. 347-351 (P. Ortiz)].

3. El mesolabio de Eratóstenes

Como señalamos en la introducción, las dos fuentes principales donde se recoge la aportación de Eratóstenes al problema de la duplicación del cubo son los *Comentarios* de Eutocio de Ascalón al Libro II de la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* [Arquímedes y Eutocio, 2005, pp. 378-383 (III, 88-96)], escrito en la primera mitad del siglo VI d.C., y el Libro III de la *Colección Matemática* de Papo de Alejandría [Pappus, 2023, pp. 17-18, (23)], que data de principios del siglo IV d.C. En ambos textos se desarrolla el planteamiento de Eratóstenes de forma similar, incidiendo de manera particular en el diseño del mesolabio, literalmente "constructor de medias", un instrumento mecánico del que se sentía particularmente satisfecho y que ha llegado a identificarse tan íntimamente con el problema de la duplicación del cubo que a este se le llama con frecuencia "el problema del mesolabio".

El opúsculo de Eutocio sobre el problema délico es un documento de incalculable valor, tanto científico como histórico, ya que incluye lo que parece ser la totalidad de las soluciones que los matemáticos griegos encontraron para resolver este problema. Si nos centramos en la aportación atribuida a Eratóstenes debe mencionarse que esta está escrita en forma de carta dirigida al rey Ptolomeo, concluyendo con el siguiente epigrama [Arquímedes y Eutocio, 2005, pp. 382-383 (III, 96, 10-27)]:

> Esto tienes a mano, amigo, si de un cubo pequeño conseguir pretendes el doble, o transformarlo en otra cualquier figura sólida, y también si midieras de este modo un recinto o un silo o la cóncava cavidad de un pozo cuando tomes las concurrencias medias entre los límites extremos dentro de cánones dobles.
> Y no intentes comprender las intrincadas tareas de los cilindros de Arquitas ni los triples cortes del cono de Menecmo ni lo que en sus líneas describe la curva figura del divino Eudoxo, pues en estas tablillas hallarás fácilmente miles de medias aun partiendo de pobre inicio.
> ¡Padre feliz, Ptolomeo, porque con tu hijo disfrutas de la edad!
> Todo cuanto agrada a las Musas y a los reyes tú mismo a tu hijo regalaste. Y lo de después, Uranio Zeus, ojalá lo guíe el cetro de tu mano.
> Esto, así suceda, y al ver la ofrenda que alguien diga: esto es obra del cireneo Eratóstenes.

Todo el epigrama tiene un notable interés histórico. La última parte permite concluir que la misiva está dirigida al rey Ptolomeo III Evergetes, que fue quien trajo a Eratóstenes a Alejandría, y su hijo sería Filopator, el futuro Ptolomeo IV, cuya educación le había sido encomendada. Dada la mención a la feliz paternidad del faraón podemos datar el documento en los primeros años de la estancia de Eratóstenes en la corte ptolemaica, esto es, no más tarde del 235 a.C.

Los versos centrales hacen referencia a tres de las soluciones del problema halladas con anterioridad, a saber, las de Arquitas, Menecmo y Eudoxo, cuyo estudio se desaconseja retóricamente, remitiendo al lector al invento del mesolabio que permite obtener fácilmente cuantas medias se desee. Estos tres matemáticos, que vivieron en el siglo IV a.C. y tuvieron una intensa relación con Platón y su Academia, representan lo más granado de esta institución por sus aportaciones a la geometría y, en relación con el problema de la duplicación del cubo, son de los primeros que encontraron soluciones concretas al mismo. La respuesta de Arquitas, incluida también por Eutocio en sus *Comentarios*, es sin duda la más complicada de cuantas se obtuvieron en la Antigüedad, de ahí la referencia en el verso a "las intrincadas tareas de los cilindros de Arquitas", pero la más relevante, recogida en el compendio de dos formas diferentes, fue sin duda la de Menecmo pues en ella está el origen de las cónicas a las que se refiere el epigrama como "los triples cortes del cono de Menecmo". La atribución del descubrimiento de las secciones cónicas a Menecmo es unánime en las diferentes fuentes antiguas. Así por ejemplo Proclo, en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* [Proclus, 1970, Comentario 112, p. 91], escribe: "Algunas de estas secciones, en particular las cónicas, fueron descubiertas por Menecmo –y Eratóstenes se refiere a esto cuando dice *Ni los triples cortes del cono de Menecmo*–."

Al contrario de las otras dos la solución de Eudoxo se ha perdido, pues Eutocio no la incluyó en su trabajo al considerarla errónea. Lo justifica del siguiente modo [Arquímedes y Eutocio, 2005, p. 359 (III, 56, 4-10)]:

> Rechazamos el escrito de Eudoxo de Cnido, puesto que en el proemio afirma haberlo descubierto mediante líneas curvas mientras que en la demostración no solo no ha usado las líneas curvas sino que, además, tras hallar una proporción discreta, la usa como si fuera continua, cosa que no era de sospechar no digo ya en Eudoxo, sino en cualquiera de los medianamente versados en geometría.

Como reconoce el propio Eutocio en esta cita, los errores atribuidos a Eudoxo son tan palmarios que difícilmente pudo haberlos cometido un genio matemático de su categoría. Además, ya vimos que Eratóstenes avala en su epigrama la construcción de Eudoxo, al que llama "divino", por lo que difícilmente puede aceptarse que en su formulación inicial esta fuera incorrecta. Debemos concluir, siguiendo a Heath [1981, Vol. I, p. 249], que en el dilatado lapso de tiempo que media entre los dos la prueba de Eudoxo se fue transmitiendo de manera incompleta o confusa, de forma que en la documentación a la que tuvo acceso Eutocio ya se habrían introducido los groseros disparates que este menciona. Lamentablemente esta conjunción de circunstancias ha provocado la pérdida de la aportación de este gran científico considerado el más importante de todos los vinculados a la Academia de Platón y una de las cimas de la matemática universal por su contribución a la teoría de las proporciones. Heath [1981, Vol. I, pp. 249-251] recoge una sugerencia de Tannery sobre cuál podría haber sido la propuesta de Eudoxo, si bien es puramente especulativa y no está basada en ninguna fuente antigua.

Finalmente, la primera parte del epigrama se refiere a la relación entre el problema del mesolabio y el de la obtención de medias proporcionales, un problema este último muy estudiado desde los primeros años del periodo griego por la matemática de origen pitagórico.

En la epístola de Eratóstenes se hace referencia al origen mitológico del problema, aludiendo a una antigua tragedia griega en cuya representación el rey Minos, al enterarse de que el sepulcro cúbico que se estaba construyendo para su hijo Glauco medía cien pies de arista, exigía que se duplicase manteniendo su forma por considerarlo "escaso recinto para una tumba real". También hace referencia Eratóstenes, como origen del problema, a la orden de duplicar el altar de Apolo que unos habitantes de la isla de Delos[3] habían recibido del oráculo con objeto de detener la progresión de alguna epidemia, orden que plantea el mismo problema que el deseo del rey Minos ya que al duplicar la arista no se obtiene un cubo de volumen doble, sino uno ocho veces mayor.

Parece plausible sostener, no obstante, que el origen real del problema de la duplicación del cubo estuvo en los intentos de generalizar a tres dimensiones el problema de encontrar un cuadrado de área doble a uno dado, cuestión que se resuelve fácilmente sin más que tomar como lado del cuadrado de área doble la diagonal del cuadrado a duplicar.[4] Al transformar este problema de geometría plana, cuya solución mediante rectas y circunferencias es inmediata, en un problema de geometría espacial, la cuestión se complicó extraordinariamente hasta hacerse irresoluble en esos términos.

Eratóstenes en su completo relato certifica que durante mucho tiempo estuvieron todos sin saber qué camino tomar y fue Hipócrates de Quíos, un notable matemático que vivió en la segunda mitad del siglo V a.C., el primero al que se le ocurrió que, si se hallaba el medio de tomar dos medidas proporcionales en proporción continua entre dos líneas rectas, de las cuales la mayor fuera el doble de la menor, el cubo quedaría duplicado. Aunque esta aportación permite transformar el problema inicial de geometría del espacio en uno de geometría plana, Eratóstenes señala acertadamente al respecto que "una dificultad se convirtió en otra dificultad no menor". No obstante, el hallazgo de Hipócrates se fue imponiendo como el procedimiento estándar para resolver el problema de Delos y la identificación era ya absoluta en la época de Eutocio de tal forma que todas las pruebas que este recoge en su opúsculo se han modificado respecto de su forma original, si era preciso, para plantear la cuestión estrictamente en términos de búsqueda de medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes dadas, de modo que en realidad no se está resolviendo ya el problema de la duplicación del cubo sino el más general de obtener un cubo que esté en una ratio determinada respecto de otro dado.

El razonamiento sería el siguiente. Sean A y B dos magnitudes dadas y hallemos otras dos X e Y que estén en proporción continua entre ellas. Entonces

$$\frac{A}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{B}$$

De la relación anterior sigue que[5]

3. El santuario de Apolo en la isla de Delos fue centro de peregrinaje de todo el mundo griego. De aquí sigue la denominación "problema délico" para referirse al de la duplicación del cubo.
4. Este problema quedó inmortalizado en la obra *Menón* [Platón, 1987, 85b, p. 311], en la que se hace referencia a la diagonal del cuadrado como la recta trazada "de ángulo a ángulo".
5. *Elementos*, Def. V.10.

$$\left(\frac{A}{X}\right)^3 = \frac{A}{X}\frac{A}{X}\frac{A}{X} = \frac{A}{X}\frac{X}{Y}\frac{Y}{B} = \frac{A}{B}$$

y, en consecuencia,[6]

$$\frac{A^3}{X^3} = \frac{A}{B} \leftrightarrow B \cdot A^3 = A \cdot X^3 \leftrightarrow X^3 = \frac{B}{A} A^3$$

Así, si se toma $B = 2A$ sigue que $X^3 = 2A^3$ y, por tanto, el cubo de arista X tiene volumen doble al de arista A. En general, el volumen del cubo de arista X está en proporción B/A con el de arista A.

Un asunto del que no se tiene ninguna referencia escrita y que ha llamado la atención de algunos autores [ver, por ejemplo, Saito, 1995], es el de valorar cómo pudo Hipócrates inferir esta simplificación del problema de la duplicación del cubo, ya que los conceptos de ratio duplicada o triplicada, así como el producto de razones, aparecieron relativamente tarde en el "corpus" de la matemática griega y, en consecuencia, Hipócrates no pudo utilizarlos.

Dado que el problema de la duplicación del cubo es una generalización natural del problema de la duplicación del cuadrado, quizás lo más lógico sea remitirse a esta segunda cuestión para inferir el posible razonamiento de Hipócrates. Como la solución del problema plano viene dada por la diagonal d del cuadrado de lado l, el teorema de Pitágoras permite inferir que $d^2 = 2l^2$, esto es, que[7] $\frac{l}{d} = \frac{d}{2l}$. Así el problema de hallar el cuadrado de área doble, que geométricamente se resuelve con la diagonal, de forma aritmética se resuelve hallando la media proporcional, en proporción continua, entre l y $2l$.[8] Resulta por tanto natural que Hipócrates intuyera que el problema de la duplicación del cubo podría resolverse aritméticamente obteniendo dos medias proporcionales, en proporción continua, entre la arista a y la magnitud $2a$.

Para confirmar esta hipótesis es plausible que Hipócrates realizara un razonamiento parecido al que vamos a describir a continuación. Si duplicamos la arista a de un cubo dado su volumen se multiplica por ocho, por lo que es posible considerar entre ambos cubos los que tienen volumen doble y cuádruple del primero. De esta forma obtenemos una serie de cuatro cubos cada uno de los cuales tiene volumen doble del anterior, teniendo el primero y el último aristas a y $2a$, respectivamente. Llamaremos x e y a las aristas de los dos cubos intermedios.

Se verifica que, si llamamos V_1, V_2, V_3 y V_4 a los volúmenes de estos cubos, entonces $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_3}{V_4} = \frac{1}{2}$, esto es, los volúmenes son continuamente proporcionales o, como diríamos en la actualidad, están en progresión geométrica. El estudio de las progresiones

6. *Elementos*, Prop. VI.16.
7. *Elementos*, Prop. VI.17.
8. *Elementos*, Prop. VI.13.

geométricas no era en absoluto ajeno a la matemática de la etapa de Hipócrates y, de hecho, la suma de los términos de una progresión geométrica es la proposición IX.35 de los *Elementos*[9] y se atribuye a la escuela pitagórica, como casi todos los resultados aritméticos de esta magna obra, recogidos en los Libros VII, VIII y IX.

Dado que los volúmenes están en proporción continua es lógico suponer que Hipócrates concluyera que entonces las aristas también tendrían que estar en proporción continua, observación que es un caso particular de la proposición XI.33 de los *Elementos* y que permite inferir que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ que es la simplificación del problema del mesolabio aportada por Hipócrates. Resulta plenamente plausible atribuir a Hipócrates alguna prueba, quizás meramente intuitiva, de que, si los volúmenes de los cubos están en proporción continua, entonces también lo estarán las aristas, del mismo modo que se le atribuye el primer enunciado de la proposición XII.2 del tratado de Euclides en la que se recoge que los círculos son uno a otro como el cuadrado de sus diámetros,[10] observación que parece de mucho mayor calado.

Una característica notable de la aportación de Eratóstenes, que da cuenta del cambio de mentalidad que se iba produciendo en la matemática griega desde la época de Platón, es su interés por la construcción práctica de las medias proporcionales. En Plutarco [2006, p. 415 (I, 14,11)] se da fe de la aversión que el filósofo ateniense tenía a la utilización de ingenios sensibles en la geometría y se señala que, como consecuencia de este rechazo, la mecánica se independizó como disciplina científica y "vino a ser una de las artes militares".

Sin embargo Eratóstenes, procediendo justamente en la dirección contraria, reprocha a sus predecesores haber escrito sus soluciones al problema de la duplicación del cubo de forma abstracta, sin tener ninguna intención de "ponerlas por obra y llevarlas al uso, excepto Menecmo en pequeña medida y con dificultades" y se vanagloria de que a él "se le ha ocurrido un medio instrumental sencillo gracias al cual hallaremos no solo dos medias proporcionales entre dos rectas dadas, sino cuantas sean requeridas". En este sentido Eratóstenes incide en que el hallazgo del mesolabio permite cubicar en general cualquier sólido dado contenido por paralelogramos y menciona, quizás con la intención de convencer al rey Ptolomeo de la utilidad de su invento, que "esta idea será útil para quienes quieran hacer mayores las catapultas o los ingenios para lanzar proyectiles".

Veamos ya el procedimiento ideado por Eratóstenes para la duplicación del cubo, en el que se incluye el diseño del mecanismo necesario para obtenerlas instrumentalmente,

9. En este artículo se ha utilizado como referencia para los *Elementos* [Euclides, 1991-1994-2008].
10. Eudemo atribuye este resultado a Hipócrates en su *Historia de la Matemática*, obra perdida pero de la que se ha conservado el fragmento relativo a las lúnulas del sabio de Quíos en un comentario aristotélico de Simplicio del siglo VI d.C. reproducido en Vera [1970, pp. 680-685].

en la versión dada por Eutocio. La prueba se centra, sin mayores comentarios, en obtener dos medias proporcionales en proporción continua entre dos magnitudes desiguales.

Proposición 3.1

Dadas dos rectas desiguales *AE* y *FC* obtener dos medias proporcionales en proporción continua.

Demostración (según Eutocio)

Tracemos *AE* perpendicularmente a una recta cualquiera *EC* y construyamos sobre *EC* tres paralelogramos iguales *AEZV*, *VZHI* e *IHCD*, uno a continuación del otro, y dibujemos en ellos las diagonales *AZ*, *VH* e *IC* tal como se indica en la figura 1, donde la recta *FC* se ha situado sobre el segmento *CD*.

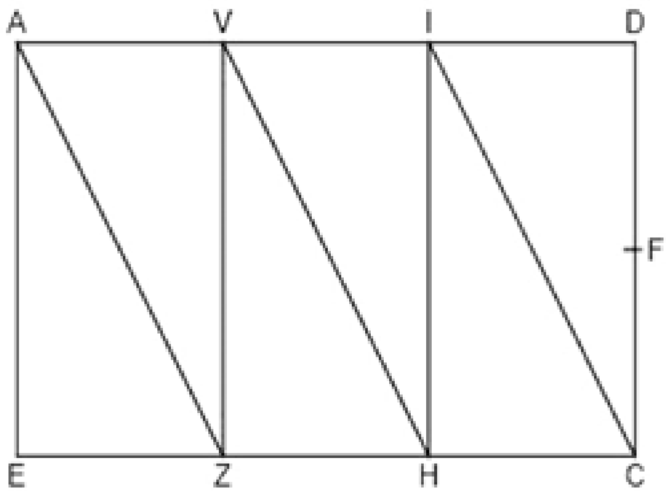

Figura 1. Mesolabio en posición inicial.

Obviamente las tres diagonales son paralelas. Dejando fijo el paralelogramo central vamos a deslizar el primer paralelogramo por encima del segundo y el tercero por debajo de este, de forma que los extremos visibles de las diagonales, que denotaremos *B* y *G*, queden alineados con *A* y *F* tal como se refleja en la figura 2.

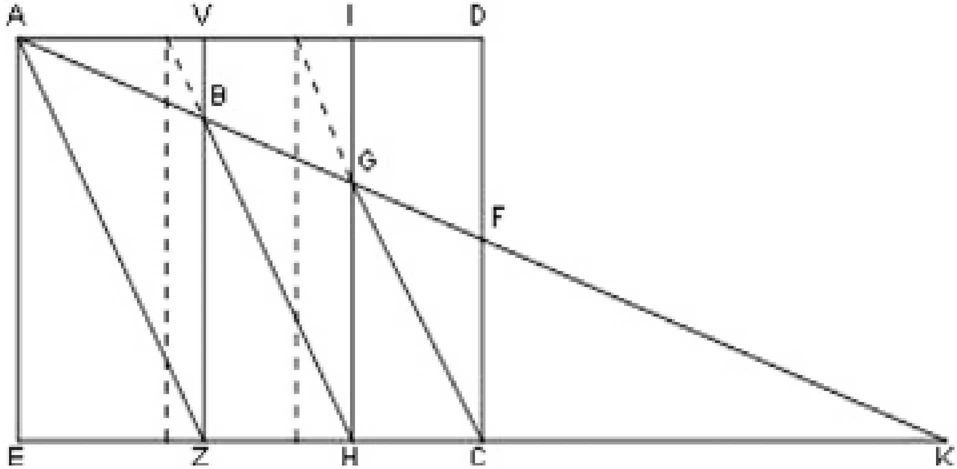

Figura 2. Mesolabio con los puntos alineados.[11]

Llamemos *K* al punto de intersección de las rectas *AF* y *EC*. Dado que los triángulos *AEK* y *BZK* son semejantes,[12] sigue que[13] $\frac{AK}{BK}=\frac{EK}{ZK}$. Asimismo, como los triángulos *AZK* y *BHK* son semejantes, resulta que $\frac{AK}{BK}=\frac{ZK}{HK}$, de donde se deduce que

$$\frac{AK}{BK}=\frac{EK}{ZK}=\frac{ZK}{HK}$$

Además, de la semejanza de los triángulos *BZK* y *GHK,* sigue que $\frac{BK}{GK}=\frac{ZK}{HK}$ y de la semejanza entre los triángulos *BHK* y *GCK* concluimos que $\frac{BK}{GK}=\frac{HK}{CK}$. En consecuencia, se tiene que

$$\frac{BK}{GK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{HK}{CK}$$

Pero $\frac{ZK}{HK}=\frac{EK}{ZK}$ y así

$$\frac{EK}{ZK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{HK}{CK}$$

Pero como también son semejantes las parejas de triángulos *AEK* y *BZK*, *BZK* y *GHK* y *GHK* y *FCK*, se tiene que $\frac{EK}{ZK}=\frac{AE}{BZ}$, $\frac{ZK}{HK}=\frac{BZ}{GH}$ y $\frac{HK}{CK}=\frac{GH}{FC}$. En consecuencia,

$$\frac{AE}{BZ}=\frac{BZ}{GH}=\frac{GH}{FC}$$

11. Los puntos *V*, *I*, *Z* y *H* de esta figura son los vértices visibles del paralelogramo central una vez que se han alineado los puntos *A*, *B*, *G* y *F*. Aquí, a diferencia de la figura 1, *VZ* solo es lado del primer paralelogramo e *IH* únicamente lo es del segundo.
12. *Elementos*, Prop. I.29 y I.32.
13. *Elementos*, Prop. VI.4.

Así *BZ* y *GH* son dos medias proporcionales, en proporción continua, entre *AE* y *FC*, lo que concluye la prueba.

La prueba de Eratóstenes carece de la construcción geométrica característica de las demostraciones de Euclides que permitiría obtener exactamente las dos medias proporcionales con la ayuda exclusiva de la regla y el compás. Como Eratóstenes desconocía esta construcción, que muchos siglos después se demostró que era imposible, lo que hace es diseñar un ingenio mecánico que permite "tomar las dos medias instrumentalmente". Para ello apunta que [Arquímedes y Eutocio, 2005, p. 381 (III, 92,26-94,9)] "se fija una estructura de madera o de marfil o de bronce que tenga tres tablillas iguales lo más finas posible, de las cuales la del centro esté encajada y las otras dos puedan correr por entalladuras; de tamaño y proporciones como cada uno considere conveniente". Y finalmente indica que "para obtener las líneas con la suficiente precisión hay que tener cuidado de que al mover las tablillas permanezcan todas paralelas y bien fijadas y sujetas uniformemente entre sí".

Se advierte que el interés de Eratóstenes por asegurar la aplicación práctica de su método para la obtención de medias proporcionales es notable, pues era muy consciente de que el procedimiento para conseguir la alineación de los puntos en el mesolabio no era geométricamente exacto sino mecánicamente intuitivo y dependía de la habilidad del operario. Esta forma de proceder, tan poco ortodoxa según la tradición de la geometría griega, no tardó en provocar las críticas de algunos de sus contemporáneos. Así Eutocio se hace eco en sus *Comentarios* [Arquímedes y Eutocio, 2005, p. 383 (III, 98,5-910)] de las referencias burlescas al procedimiento de Eratóstenes vertidas por Nicomedes, que lo consideró "impracticable y carente de valor geométrico". No obstante, Eutocio, eludiendo toda polémica, se limitó a poner juntas las aportaciones de ambos al problema délico para que fuera el lector el que las juzgara.

En cualquier caso, esta utilización de instrumentos sensibles en la geometría diferencia a Eratóstenes de alguno de sus más ilustres predecesores en la corte alejandrina, especialmente de Euclides cuya mentalidad era netamente platónica y, en consecuencia, muy alejada de todo lo que tuviera que ver con las aplicaciones de la geometría a la realidad física.

La otra fuente principal para el estudio de las soluciones ideadas en la Antigüedad para el problema de la duplicación del cubo es, como hemos mencionado, el Libro III de la *Colección Matemática* de Papo de Alejandría, uno de los más ilustres representantes de lo que se ha dado en llamar, quizás de forma algo exagerada, el renacer o la edad de plata de la matemática griega. Esta reseña no es tan detallada como la de Eutocio, pues mientras este recoge todas las soluciones de las que tenía conocimiento con el propósito declarado de que "quede clara la idea de los escritos que nos han llegado", y así se refiere a las construcciones de Platón, Herón, Filón de Bizancio, Apolonio, Diocles, Papo, Esporo, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes, el erudito de Alejandría por su parte hace una selección y desarrolla únicamente las respuestas de Eratóstenes, Nicomedes, Herón y la suya propia.

Sin embargo la documentación que tuvieron a su disposición Papo en Alejandría y Eutocio en Constantinopla debió ser la misma o muy parecida ya que el primero se refiere también, aunque sin detallarlas, a las aportaciones de Filón y Apolonio y comenta que "explicaremos cuatro soluciones del problema, con alguna discusión añadida por nosotros", lo que parece poner de manifiesto que hizo una criba entre las diferentes opciones disponibles siguiendo una línea argumental sobre la que trataremos de indagar.

En primer lugar, cabe observar que Papo, a diferencia de Eutocio que ni siquiera menciona esta cuestión, está muy interesado en poner de manifiesto que el problema de Delos es un problema sólido y que, por tanto, no tiene solución empleando únicamente la regla y el compás. De hecho, este pasaje del Libro III comienza con su conocida división de los problemas geométricos en planos, sólidos o lineales según que para su solución se precisen construcciones que se ejecuten únicamente con rectas y circunferencias, mediante el uso adicional de las secciones cónicas o con el concurso de otras curvas, respectivamente [Pappus, 2023, p. 16, (20)].

Una vez puesto de manifiesto que el problema de la duplicación del cubo es sólido y, "dada la dificultad de describir en el plano las secciones cónicas", Papo se refiere a los esfuerzos de algunos geómetras por diseñar ingenios mecánicos para obtener instrumentalmente las medias proporcionales en proporción continua entre dos magnitudes dadas. Parece que este fue el criterio esencial que utilizó para seleccionar, de entre todas las soluciones disponibles, aquellas que le parecieron más adecuadas a sus propósitos. Al menos este criterio lo empleó para elegir la aportación de Herón y también la de Eratóstenes, bautizando de paso su mecanismo con el nombre de "mesolabio" o "constructor de medias", apelativo que no aparece en los *Comentarios* de Eutocio. En cuanto a la de Nicomedes dice lacónicamente que "ha resuelto el problema mediante la curva concoide, con la cual también trisecó ángulos", pero sin duda en esta elección está pesando, como en las anteriores, la posibilidad de obtener las medias instrumentalmente, ya que Nicomedes describió un compás específico que le permitía dibujar su curva de manera precisa.

Centrándonos en la aportación de Eratóstenes, que es la que interesa a los efectos de este artículo, lo primero que se observa es que Papo, al contrario de lo que hace Eutocio, la ha podado de todas las referencias a la historia del problema, incluyendo en la tala el epigrama dirigido al rey Ptolomeo y cualquier comentario de la epístola original que no se refiera a la demostración del resultado propiamente dicha. Y desde luego no será porque en la *Colección Matemática* se hayan omitido sistemáticamente las citas históricas. Al contrario, estas se han incluido siempre que su autor lo ha considerado conveniente. Por ello debemos concluir que en esta ocasión Papo no estaba interesado en referirse a la historia del problema, que quizás consideró suficientemente conocida, y se enfocó solo en los aspectos técnicos.

Veamos a continuación la prueba de Eratóstenes en la forma en la que la transcribe Papo, que es muy similar a la recogida por Eutocio pero que muestra algunas diferencias interesantes que ponen de manifiesto los cambios que se van produciendo en la forma de presentación de los resultados matemáticos según los parámetros académicos de cada época. En este sentido debe resaltarse que Papo señala explícitamente en la prueba que lo que desea es obtener un cubo de volumen doble a uno dado y, aunque lo que hace para ello es obtener dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas, exige a la mayor ser doble de la menor y al final de la demostración indica expresamente que esto resuelve el problema de la duplicación del cubo. Nada de esto hay en la prueba de Eutocio pues en su época la identificación de los dos problemas era tal que no precisaba de ningún comentario. Para acentuar estas diferencias el enunciado de la proposición 3.2 se ha expresado en términos de duplicación del cubo, mientras que el de la proposición 3.1 se hizo mediante medias proporcionales en proporción continua.

Proposición 3.2

Obtener un cubo de volumen doble a uno dado.

Demostración (según Papo)

Sea *ABCD* un marco fijo y en él sean *AEF*, *MZK* y *NHG* tres triángulos rectángulos iguales con ángulo recto en *E*, *Z* y *H*, respectivamente. Supongamos que el triángulo *AEF* está fijo mientras que el triángulo *MZK* se puede mover sobre las rectas *AB* y *CD* de forma que *MZ* se mueve a lo largo de *AB* por una ranura preparada al efecto mientas que el vértice *K* se desliza sobre la regla *CD* también con una ranura. Del mismo modo el triángulo *NHG* se mueve sobre las reglas *AB* y *CD* por las ranuras mencionadas.

Una vez establecido esto, si se desea obtener un cubo de volumen doble a uno dado, tomamos *GI* la mitad de *AC* y movemos los triángulos *MZK* y *NHG* hasta que los puntos *A* e *I* estén alineados con los puntos *L* y *O* donde se cortan los triángulos, tal como se indica en la figura 3.

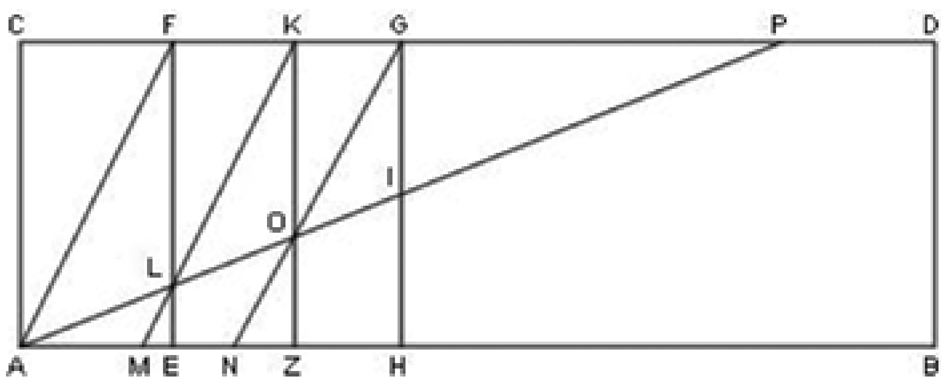

Figura 3. Duplicación del cubo según Papo.

Tracemos ahora la recta que une *ALOI* y prolonguémosla hasta cortar a la recta *CD* en un punto *P*. Entonces se tiene, en virtud de la semejanza[14] entre los triángulos correspondientes, que[15]

$$\frac{AC}{LF}=\frac{AP}{LP}=\frac{AF}{LK}=\frac{FP}{KP}=\frac{LF}{OK}=\frac{LP}{OP}=\frac{LK}{OG}=\frac{KP}{GP}=\frac{OK}{IG}$$

Así

$$\frac{AC}{LF}=\frac{LF}{OK}=\frac{OK}{IG}$$

Por tanto, *LF* y *OK* son medias proporcionales, en proporción continua, entre *AC* e *IG* y, como *AC* es el doble de *IG*, sigue que el cubo sobre *AC* tiene volumen doble que el cubo sobre *LF* como se quería probar.

Papo finaliza esta parte dedicada a la solución de Eratóstenes con dos comentarios interesantes. Por un lado, apunta que si *AC* e *IG* tuvieran otra ratio entonces los cubos tendrían sus volúmenes también en esa otra proporción, lo que evidencia su interés por poner de manifiesto que el problema de la duplicación del cubo ya no pretendía únicamente hallar un cubo de volumen doble a uno dado, de acuerdo con su formulación inicial, sino que la duplicación se había generalizado a cualquier otra ratio. Además, añade con bastante atrevimiento la siguiente apostilla: "Y desde esto es claro que lo que es propuesto es imposible de resolver mediante construcciones planas". Aunque en Pappus [2023, p. 18, nota al pie 47 (Hultsch)] se señala que este último inciso, francamente discutible, es probablemente una interpolación posterior, a nosotros nos parece que es coherente con el interés que Papo manifiesta en todo este estudio por resaltar el carácter sólido del problema y que, por tanto, muy bien podría ser un comentario original del maestro alejandrino.

4. La medida de la circunferencia terrestre

Eratóstenes calculó la longitud de la circunferencia terrestre en su obra *Sobre la medida de la tierra*, un trabajo que trata sobre astronomía y geodesia y en el que se ocupa, entre otros aspectos, de medir determinados parámetros en nuestro planeta.

De todos estos cálculos se han preservado detalles en obras de otros autores, pero su medida del meridiano terrestre se ha conservado muy bien explicada en un compendio de Cleomedes titulado *El movimiento circular de los cuerpos celestes*. Cleomedes fue un astrónomo y filósofo estoico que debió vivir a caballo entre los siglos II y III d.C.[16] y que escribió esta obra, con propósito pedagógico, como parte de un trabajo mayor sobre filosofía estoica.

14. *Elementos*, Prop. I.29 y I.32.
15. *Elementos*, Prop. VI.4.
16. La datación es difícil ya que no disponemos de muchas más referencias ciertas, aparte de que fue posterior a Posidonio puesto que lo cita. Para una discusión sobre esta cuestión nos remitimos a Cleomedes [2004, pp. 2-4 (Bowen y Todd)].

Según se señala en Cleomedes [2004, p. xi (Bowen y Todd)] su aportación sería una insignificante nota al pie en la historia de esta corriente pero, al haberse perdido los trabajos más importantes del estoicismo, su singularidad la ha realzado.

Independientemente de la importancia que para el conocimiento de esta escuela filosófica pueda tener la obra de Cleomedes, el capítulo séptimo de la misma ha preservado para la posteridad dos procedimientos para el cálculo de la medida de la Tierra concebidos en la Antigüedad, los de Eratóstenes y Posidonio. Aunque Cleomedes apunta que el método de Eratóstenes "tiene un mayor grado de oscuridad", la realidad es que ambos cómputos presentan una dificultad similar, si bien el del primero, que vamos a desarrollar a continuación, es mucho más adecuado técnicamente y fue el preferido por la mayor parte de los eruditos helenos.

La concepción de la Tierra como una esfera fue probablemente un descubrimiento de la escuela pitagórica, aunque Anaxágoras lo habría sugerido con anterioridad [Heath, 1981, Vol. I, pp. 162-163] y, sobre todo a partir de Sócrates, fue ampliamente aceptada por la comunidad científica griega.

La primera referencia a la longitud de la circunferencia terrestre se encuentra en la obra de Aristóteles *Acerca del cielo* [Aristóteles, 2015, Libro II, 298a16-17, p. 89], en la que se recoge para este parámetro, invocando la autoridad de "todos los matemáticos", un tamaño aproximado de cuarenta miríadas de estadios. Dado que una miríada de estadio son *10.000* estadios, se obtiene para el meridiano terrestre una longitud de *400.000* estadios. En cuanto a la referencia a "todos los matemáticos", se ha especulado [Aujac, 2001, p. 50] con que este cómputo hubiese sido efectuado por Eudoxo de Cnido, atribución plenamente plausible dado el interés de este científico por los temas astronómicos y su solvencia como geómetra perteneciente al círculo de Platón y, por tanto, próximo también a Aristóteles que no desconocería sus aportaciones a esta ciencia. En este ámbito hay una referencia de Arquímedes en el *Arenario* a un cálculo que habría hecho Eudoxo sobre el diámetro del Sol [Arquímedes, 2009, p. 133 (II, 220, 20-21)], de lo que puede inferirse razonablemente que también se habría preocupado de medir este mismo parámetro en la Tierra.

La siguiente referencia sobre la medida de la Tierra la encontramos precisamente en la obra de Arquímedes el *Arenario*, en la que se señala que [Arquímedes, 2009, p. 133 (II, 220, 8-10)] "el perímetro de la Tierra es de *300* miríadas de estadios y no mayor, aunque algunos han intentado demostrar […] que es de *30* miríadas de estadios". Si aceptamos este segundo valor como el más plausible, independientemente de que Arquímedes utilizara el primero porque se ajustaba mejor al propósito de su trabajo en el que representaba números muy grandes, obtenemos un valor de *300.000* estadios para la longitud de la circunferencia terrestre.

Por esta misma época realizó Eratóstenes su medida del perímetro de la Tierra, que dio un valor de *250.000* o *252.000* estadios según las fuentes que se utilicen. Como hemos comentado Arquímedes y Eratóstenes sostuvieron una importante relación epistolar y, aunque probablemente no se conocían personalmente, estarían al tanto del trabajo que cada uno de ellos desarrollaba. Sin embargo, no hay ninguna evidencia de comunicación entre ambos respecto del problema de la medida de la Tierra. Dado que Arquímedes no menciona en el *Arenario* el cálculo de Eratóstenes cabe suponer que este se realizó con posterioridad al compendio del genio de Siracusa. Si este fuera el caso habría que fecharlo en torno al año 220 a.C., esto es, al final del reinado de Ptolomeo III o, quizás, al principio del de su hijo.

El ingenioso procedimiento desplegado por Eratóstenes, de acuerdo con el relato de Cleomedes [2004, pp. 81-85 (I, 7, 49-110)], se basa en una serie de asunciones a partir de las cuales los cálculos van a ser inmediatos. Las hipótesis de partida son las siguientes:

En primer lugar, se asume que Alejandría y Siena (hoy Aswan), una ciudad del sur de Egipto situada a la altura de las primeras cataratas del Nilo, se encuentran en el mismo meridiano.[17] En segundo lugar, se observa que la distancia entre ambas ciudades es de *5.000* estadios. En tercer lugar, se asume que los rayos del Sol caen de forma paralela sobre cualquier punto de la Tierra.[18] En cuarto lugar, se tiene en cuenta que las líneas rectas cortadas por paralelas hacen los ángulos alternos iguales.[19] En quinto lugar, se acepta que los arcos de circunferencia correspondientes al mismo ángulo central tienen la misma proporción sobre sus propias circunferencias. Para aclarar esta asunción Cleomedes, además de invocar a la autoridad de los geómetras, pone como ejemplo que "cuando los arcos corresponden a ángulos iguales, si uno de ellos es la décima parte de su propio círculo [circunferencia], entonces todos los demás arcos también serán la décima parte de los suyos". La sexta y última hipótesis es que, en el solsticio de verano, justo al mediodía, los rayos del Sol inciden verticalmente sobre Siena.[20]

Un problema sobre el que se ha especulado mucho es el de determinar el procedimiento que habría seguido Eratóstenes para establecer que la distancia entre las dos ciudades consideradas era de *5.000* estadios. Indudablemente en aquella época se tenía una idea aproximada de la distancia entre ambas ciudades, puesto que el tráfico comercial entre ellas era fluido y se sabía que las caravanas tardaban unos cincuenta días en ir de una población a otra, recorriendo cada día en torno a cien estadios. Pero quizás para llegar a ese guarismo Eratóstenes se sirvió de un procedimiento más exacto.

En ese sentido Marciano Capella señala en Capella [2023, p. 196 (Libro VI.598)] que fueron los "medidores del rey Ptolomeo", los agrimensores profesionales al servicio del monarca, especialmente entrenados para caminar a pasos iguales e ir contándolos, los que hicieron el cálculo. Si eso fue así probablemente indicaría una especial inclinación de Ptolomeo III (o quizás Ptolomeo IV) por este trabajo concreto de Eratóstenes, dado el interés

17. En realidad, Siena y Alejandría no están situadas sobre el mismo meridiano, siendo su diferencia en longitud de 2º 3'.
18. Esta asunción, muy habitual en los estudios astronómicos de la época, es equivalente a suponer que el Sol está a una distancia infinita de la Tierra.
19. *Elementos*, Prop. I.29.
20. Este hecho se deduce de que, en ese día y hora, el fondo de una cisterna situada en Siena, a la altura de las primeras cataratas del Nilo, era iluminado por los rayos del Sol, detalle que es señalado en Plinio [1982, Libro II.183].

político que pudiera tener. No debe olvidarse, como se señala en [Aujac, 2001, p. 51], que algún tiempo después Estrabón ya proclamó alto y claro que la geografía estaba al servicio de los gobiernos. Como señalaremos más adelante la evaluación de la exactitud con la que fue realizado este cálculo resultará decisiva para determinar el grado de aproximación a la *realidad*[21] de la medida del meridiano terrestre realizada por Eratóstenes.

Una vez asumidas las seis hipótesis que hemos indicado, el procedimiento para el cálculo es el que se recoge a continuación. Dado que los rayos del Sol inciden verticalmente sobre Siena el día del solsticio de verano al mediodía, el gnomon[22] de un reloj de sol situado en ese lugar no proyectará sombra alguna. Pero en Alejandría, que está situada bastante más al norte como indica Cleomedes, ese mismo día y hora el correspondiente gnomon proyectará la sombra que corresponda, la cual determinará con este el ángulo *APB* tal como se indica en la figura 4, donde *A* representa la localización de Alejandría, *S* la de Siena, *AP* el gnomon en Alejandría, *AB* la longitud de la sombra proyectada por este y *SU* el gnomon en Siena.

Si ahora dibujamos las rectas que contienen a los dos gnomones, esto es, las rectas que contienen los segmentos *AP* y *SU*, y las prolongamos a través de la Tierra se cortarán en su centro,[23] que hemos designado por *O*. Ya que estamos considerando que los rayos del Sol son paralelos, la recta que contiene el segmento *BP* y la que contiene los puntos *S* y *U* serán paralelas, por lo que la recta que va desde el centro de la Tierra hasta Alejandría cortará a estas de forma que los ángulos alternos sean iguales según la hipótesis cuarta. En consecuencia, el ángulo *AOS* será igual al ángulo *BPA*.

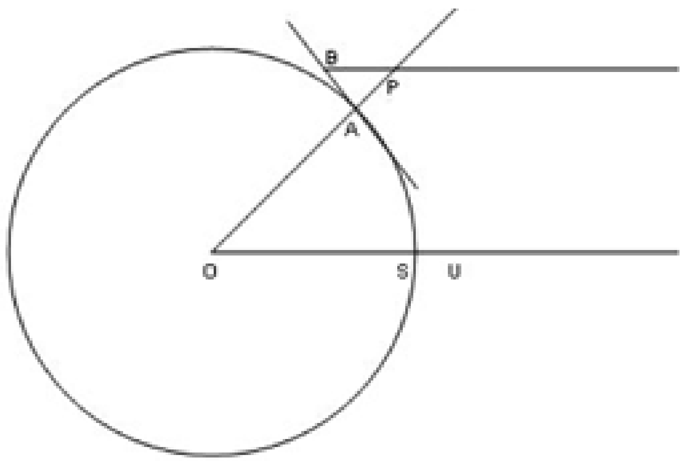

Figura 4. Medida de la Tierra por Eratóstenes.

21. Las referencias a la *realidad de la medida del meridiano terrestre* deben ser entendidas en términos del consenso científico internacional sobre su existencia ideal como valor promedio, establecido en *40.007,86* km.
22. Parece ser que fue Anaximandro quien introdujo el gnomon en Grecia. Consistía en una vara perpendicular al horizonte cuya sombra proyectada sobre un plano o círculo servía para medir el tiempo.
23. *Elementos*, Prop. III.19.

Dado que el arco correspondiente al ángulo *BPA* medido sobre el cuenco del reloj de sol en Alejandría era una cincuentava parte de la circunferencia total, según comprobó Eratóstenes, el arco del meridiano entre Siena y Alejandría será también, por la asunción quinta, una cincuentava parte de la longitud total del meridiano. Así, dado que la distancia entre Alejandría y Siena era de *5.000* estadios, sigue que la longitud de cualquier círculo mayor de la Tierra es de *50x5.000* estadios, esto es, *250.000* estadios. Y, concluye Cleomedes, "este es el procedimiento de Eratóstenes".

Cleomedes finaliza su exposición haciendo dos observaciones interesantes. En primer lugar, señala que, de acuerdo con este cálculo, el diámetro de la tierra "excederá *80.000* estadios, dado que debe ser ciertamente un tercio del gran círculo de la Tierra[24]". La segunda observación, basándose en este cálculo, incide en reafirmar la forma esférica de la Tierra señalando que "los huecos ocupados por el mar y las protusiones debidas a las montañas […] serían como una mota de polvo sobre una pelota".

Aunque la obra de Cleomedes es sin duda la fuente más detallada sobre el cálculo de la medida de la Tierra realizado por Eratóstenes, no es la única referencia disponible de este hito científico. Otras fuentes antiguas citan también este logro, pero lo que ha llamado la atención de los historiadores de la ciencia es que la mayor parte de ellas mencionan el número de *252.000* estadios como la cifra obtenida, por lo que hay una discrepancia de *2.000* estadios respecto del relato de Cleomedes. Así, por ejemplo, Plinio escribe en su obra *Historia Natural* [Plinio, 1982, Libro II.CXII.247] que "la redondez de la Tierra tenía *252.000* estadios, medida que de acuerdo con la práctica romana es de *31.500* millas" y, en este mismo sentido, Marciano Capella [2023, p. 196 (Libro VI.596)] recoge que "Ciertamente, la circunferencia de la Tierra es de doscientos cincuenta y dos mil estadios como demostró el doctísimo Eratóstenes mediante el cálculo gnómico".

Se han dado varias explicaciones plausibles de esta discrepancia de *2.000* estadios entre las diferentes fuentes [pueden verse las referencias en Carman y Evans, 2015, p. 4], aunque ninguna de ellas está apoyada en algún tratado de los que abordan este problema en la Antigüedad. Una posibilidad es que la cifra se hubiera modificado por conveniencia, con objeto de hacer coincidir el arco correspondiente a un grado sexagesimal con una longitud de *700* estadios sobre el meridiano de la Tierra. Si esta fuera la verdadera explicación habría que concluir que entonces la corrección no sería obra de Eratóstenes, sino de algún estudioso posterior, ya que en su tiempo aún no se había adoptado en Grecia la división babilónica del círculo en *360* grados sexagesimales.[25] En esta línea otra posible explicación sería que, dado que Eratóstenes dividió el meridiano en sesenta partes en sus estudios geográficos, se hubiera buscado algún múltiplo de sesenta cercano a *250.000* con la finalidad de hacer más sencillos los cálculos.

24. Se aproxima por 3, como se hacía habitualmente, la razón π.
25. Fue Hiparco de Nicea (190 a.C.-120 a.C.) el primero que dividió la circunferencia en *360* partes.

Otros autores se han decantado por conjeturar que posiblemente Eratóstenes modificó sus primeras medidas con objeto de obtener un resultado más preciso. Así la proporción de *1/50* para la medida del ángulo respecto del total de la circunferencia se ha sustituido por *1/48*, o incluso por *25/1.260*, y la distancia entre Siena y Alejandría se ha estimado en *5.040* o en *5.250* estadios en lugar de la cifra redonda de *5.000* recogida por Cleomedes. El propio Cleomedes certifica que los cálculos iniciales de Eratóstenes fueron confirmados por otros realizados en el solsticio de invierno, lo que parece indicar que las cuentas se perfeccionaron en diferentes momentos. No obstante, también resultaría plausible que la cifra obtenida por Eratóstenes hubiera sido *252.000* estadios y que la simplificación a *250.000* la hubiera realizado Cleomedes por motivos pedagógicos, con la intención de facilitar a su alumnado tanto los cálculos como la comprensión del procedimiento. Esto podría justificar la extraña referencia que este hace a la "oscuridad" del método de Eratóstenes, que no se compadece con la sencillez del desarrollo que realiza Cleomedes, y que da a entender que el planteamiento de aquel fue simplificado por este.

Finalmente, en otros artículos se hacen reconstrucciones más laboriosas [ver, por ejemplo,[26] Carman y Evans, 2015], pero en definitiva no dejan de ser especulaciones, más o menos sofisticadas, de un enigma que solo el hallazgo de alguna nueva fuente desconocida o que haya pasado desapercibida podría alumbrar con algo más de certeza.

El último asunto a dilucidar en relación con el cálculo de Eratóstenes, que resultará clave para determinar su grado de aproximación a la *realidad*, se refiere a la cuantificación de la unidad de medida utilizada, el estadio. Lo primero que hay que señalar es que, a diferencia de lo que sucedió con la milla romana, los griegos no disponían de una unidad de medida que fuera utilizada de manera generalizada en toda su zona de influencia. A diferencia de los imperios persa y romano que pudieron imponer sus medidas, en las ciudades griegas no había un criterio estandarizado a este respecto. De manera que no sabemos exactamente la medida del estadio utilizado por Eratóstenes, lo que provoca una incertidumbre considerable en relación con el grado de aproximación de su cálculo a la *realidad* terrestre.

La medida *real* de la circunferencia de nuestro planeta se ha establecido en 40.007,86 kilómetros. Si se divide este guarismo entre *252.000* estadios se obtiene para esta unidad un valor de *158,76* metros, lo que no coincide con ninguna de las relaciones entre estadio y milla romana de las que se tiene constancia. Las ratios conocidas varían desde *7,5* estadios hasta *9* estadios para una milla. Como el valor de la milla romana era de *1.480* metros[27], se obtiene para el estadio un valor mínimo de *164,44* metros y un valor máximo de *197,33* metros. Plinio, en la cita que hemos recogido más arriba, toma como valor del estadio *185* metros, considerando la ratio común de ocho estadios por milla, y así resulta que *252.000* estadios son *31.500* millas. Esta equivalencia también la realiza Marciano Capella [1982, p.

26. En este artículo se especula con que el guarismo de *252.000* estadios lo pudo haber obtenido Eratóstenes considerando una distancia entre el Sol y la Tierra de *4.080.000* estadios, en lugar de una distancia infinita como considera Cleomedes.

27. Aunque el valor de la milla romana en metros puede variar en función de la fuente, en este trabajo seguiremos a Shcheglov [2018, p. 154].

214 (Libro VI.609)], quien apunta que "Todo el perímetro de esta Tierra entera y su circunferencia completa, para expresar en medida romana cualquier cálculo que yo haya expresado en estadios, es de *31.500* millas". Sin embargo, Diller [1949, p. 8] descalifica este cómputo y afirma con razón que esta conversión, realizada de manera automática por estos autores, no es evidencia del verdadero valor del estadio utilizado por Eratóstenes.

En este mismo artículo se señala que "la única evidencia de la longitud del estadio utilizado por Eratóstenes es una solitaria pero aparentemente fiable afirmación en Plinio [1982, Libro XII.XXX.53]" donde se indica que "según la medida de Eratóstenes, el esqueno vale cuarenta estadios". El esqueno era una medida egipcia equivalente a *6.300* metros,[28] de donde sigue que el estadio que se consideró medía *157,5* metros. Esta hipótesis es plenamente verosímil toda vez que las técnicas de medición de las tierras estaban muy desarrolladas en Egipto y, por tanto, es posible que el estadio utilizado en Alejandría antes de la dominación romana tuviera una relación exacta con la unidad de medida local. Abundando en esta idea debe hacerse notar que Proclo ya señaló [Proclus, 1970, Comentario 65, p. 52] que "los primeros que descubrieron la geometría fueron los egipcios para medir sus tierras. Esto era necesario para ellos porque las continuas avenidas del Nilo provocaban desbordamientos que borraban las líneas que delimitaban sus propiedades". En definitiva, si aceptamos este dato recogido por Plinio, obtenemos para la medida de la circunferencia terrestre un valor de *39.690* kilómetros con lo que el error cometido por Eratóstenes sería del *0,79 %* por defecto, aproximación verdaderamente admirable teniendo en cuenta las limitaciones técnicas a las que tuvo que enfrentarse.

Esta hipótesis ha sido discutida en trabajos posteriores hasta el punto de que algunos autores sostienen que no hay motivos fundados para aceptar que el estadio utilizado por Eratóstenes tuviera una longitud diferente a los *185* metros que se obtienen al considerar la ratio común de ocho estadios por milla. En este sentido merece la pena destacar el artículo de Shcheglov [2018] que, además de contener una exhaustiva bibliografía sobre el tema, realiza una comparación sistemática de las distancias entre diferentes lugares medidas en estadios y recogidas en diferentes fuentes antiguas y las distancias reales medidas en la actualidad con los métodos modernos. De esta manera trata de establecer el porcentaje de error, normalmente por sobrestimación, que habitualmente se cometía en la Antigüedad al medir la distancia entre dos puntos.

De acuerdo con los datos que obtiene, y aplicándolos específicamente al caso de Eratóstenes y su medida de *5.000* estadios entre Alejandría y Siena, viene a concluir que es mucho más razonable pensar que el estadio utilizado fue el de *185* metros, ya que el error que se habría cometido, respecto de la distancia real de *801* km entre las latitudes de ambas ciudades, sería del *15,5 %*[29] por exceso, porcentaje que considera mucho más plausible que

28. El cómputo sigue de que un esqueno son *12.000* codos reales egipcios y la medida del codo se ha establecido en *525* mm sobre la base de evidencia arqueológica [Shcheglov, 2018, p. 156].
29. Si se hubiera comparado con la distancia real en línea recta entre Siena y Alejandría, que asciende a *843,6* km, el error sería del *9,65 %* por exceso.

un error del *1,7 %*[30] por defecto que es el que se habría producido empleando el estadio corto de *157,5* metros. Con el valor de *185* metros para el estadio se obtiene como longitud del meridiano terrestre *46.620* km, lo que supone un error por exceso respecto de las mediciones actuales del *16,53 %*, error que sigue siendo muy razonable pero que, obviamente, está lejos del señalado con anterioridad.

Sin perjuicio de que la argumentación recogida en Shcheglov [2018] es sólida, está muy bien fundamentada y, por tanto, los resultados son plenamente plausibles en general, consideramos que quizás no proceda su aplicación al caso concreto del experimento de Eratóstenes. En este supuesto específico es muy probable, y así lo señala Marciano Capella en la cita recogida con anterioridad, que la medición fuera realizada por los agrimensores reales, personas al servicio del rey y con una amplísima experiencia en la medición de tierras, experiencia trasladada de unas generaciones a otras en el antiguo Egipto debido a las dificultades provocadas por las avenidas del Nilo, lo que permite conjeturar que el error cometido debió de ser muy inferior al habitual. Más aún si se produjo un encargo expreso del monarca, lo que es muy posible teniendo en cuenta la posición que ocupaba Eratóstenes en la corte y la importancia política que los reyes daban a las cuestiones geográficas. Además, por las características del experimento, Eratóstenes tenía que ser muy consciente de que era necesario calcular la distancia en línea recta entre las dos ciudades, lo que habría sido advertido específicamente a los agrimensores y tenido en cuenta por el propio Eratóstenes al afinar el dato. Para terminar de complicar la situación recordemos que no sabemos con seguridad si la cifra exacta de *5.000* estadios es la original de Eratóstenes o fue redondeada por Cleomedes para simplificar los cálculos, lo que modificaría también los porcentajes de error obtenidos.

Finalmente merece la pena señalar sobre este asunto de la exactitud del cálculo de Eratóstenes que algunos autores, sin discutir la utilización del estadio corto, han apuntado que este ha sido sobrevalorado y que, en realidad, el resultado final ha sido tan asombrosamente exacto porque los errores cometidos, tanto en las asunciones previas como en las diferentes mediciones, se han compensado unos con otros [ver, por ejemplo, Salinas, 2002]. En todo caso nosotros consideramos que lo verdaderamente relevante es destacar que el procedimiento concebido por el científico de Cirene era totalmente correcto, bajo las hipótesis establecidas, sin perjuicio de que las limitaciones instrumentales de la época no permitiesen obtener el cómputo con absoluta fiabilidad.

5. Conclusiones

Del examen de los dos trabajos realizados por Eratóstenes y analizados en este artículo se deduce el interés de este por la aplicación de la ciencia al mundo real, liberándose en este aspecto de los moldes impuestos por el platonismo que, como sabemos, se caracterizaba por su exaltación de la especulación pura y su desprecio por la experimentación. En este cambio

30. Si se hubiera comparado con la distancia real en línea recta entre Siena y Alejandría el error sería del *6,65 %* por defecto.

de mentalidad que se va produciendo en la etapa alejandrina pudo influir tanto el practicismo que caracterizaba a la ciencia egipcia como la necesidad de devolver a los monarcas que financiaban las actividades de docencia e investigación que se desarrollaban en el Museo y la Biblioteca algún rédito concreto por ese esfuerzo.

Dada la posición que ocupaba Eratóstenes (s. III a.C.) en la corte, cabe inferir que su preocupación por poner de manifiesto a las autoridades la utilidad de la Ciencia para mejorar la situación política y económica de la dinastía ptolemaica sería especialmente intensa. Y en los dos trabajos recogidos en este artículo se observa claramente esta disposición. En el primero, realizado no más tarde del año 235 a.C., Eratóstenes diseña un instrumento específico para la construcción práctica de medias proporcionales y señala su utilidad para la fabricación de catapultas y otros ingenios de guerra cada vez más potentes y poderosos. Por su parte, con la medida de la circunferencia terrestre, llevada a cabo en torno al 220 a.C., pretende contribuir a un mejor conocimiento del planeta, en el marco de sus estudios geográficos que, obviamente, debieron ser de gran interés político, militar y económico para la monarquía.

La medida del meridiano terrestre, que se ha conservado con bastante detalle en un trabajo de Cleomedes, un astrónomo y filósofo estoico que vivió entre los siglos II y III d.C., constituye un hito científico de primera magnitud, dadas las limitaciones técnicas existentes en la época en la que se realizó. Lo más destacado que debe ponerse de manifiesto es que el procedimiento diseñado por Eratóstenes es correcto desde el punto de vista teórico, asumiendo que la Tierra es una esfera perfecta, que Siena y Alejandría están en el mismo meridiano y que los rayos solares caen de forma paralela sobre cualquier punto de nuestro planeta. Sin embargo, sobre la exactitud del resultado debemos ser sumamente cautelosos pues no hay evidencias concluyentes sobre un aspecto fundamental: la medida del estadio utilizado. Según que se acepte la posibilidad de que Eratóstenes hubiera empleado un estadio más corto, basado en su relación con las unidades de medida egipcias, o más largo, de acuerdo con la longitud estándar de esta unidad en el periodo romano, se obtienen errores de aproximación inferiores al *1 %* en el primero de los casos o del orden del *17 %* en el segundo.

En algunos estudios recientes se incide en la idea de que no hay razones de peso para sostener la utilización por Eratóstenes de un estadio corto, pero los argumentos utilizados para desacreditar esta hipótesis, ampliamente extendida entre los investigadores,[31] no son en modo alguno concluyentes ni desvirtúan la posibilidad de una íntima conexión entre las unidades de medida de origen griego utilizadas en Alejandría antes de la dominación romana y las de procedencia egipcia. Esta opción, señalada expresamente por Plinio, también estaría justificada en la amplia experiencia que habrían acumulado los egipcios en la medición de las tierras como consecuencia de las continuas avenidas del Nilo y a la que Proclo atribuye el origen de la geometría en una forma todavía empírica.

31. En Shcheglov [2018, p. 155] pueden encontrarse numerosas referencias en uno y otro sentido.

En relación con el problema del mesolabio cabe concluir, del análisis de las versiones que dan Eutocio (s. VI d.C.) y Papo (s. IV d.C.), que la construcción de Eratóstenes en ambas fuentes es muy similar, pero que se observan algunas divergencias que parecen derivar tanto de los gustos académicos de cada época como de los diferentes propósitos que tuvieron al realizar sus respectivos compendios. Así Papo todavía aborda formalmente el problema como la búsqueda de un cubo de volumen doble a otro dado, interpolando por tanto dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas, de las cuales la mayor es doble de la menor, tal como había señalado Hipócrates. La referencia a un cubo cuyo volumen está en una ratio cualquiera respecto de otro dado es solo un comentario posterior. Sin embargo, Eutocio se limita, siguiendo el canon establecido en la etapa bizantina, a encontrar dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas, sin hacer ninguna referencia a que una de ellas sea doble de la otra, con lo que ya definitivamente el problema ha trascendido de la mera duplicación tal como había sido concebido inicialmente. Por otra parte, Eutocio no hace ningún comentario relativo al carácter sólido del problema, mientras que Papo incide de forma reiterada en este aspecto que considera capital y sobre el que merece la pena insistir.

Sin embargo, en las dos versiones se observa un interés específico por describir correctamente el mesolabio. Este interés es muy claro en Eutocio, que parece estar transcribiendo literalmente el documento inicial de Eratóstenes en todo lo que no tiene que ver con la prueba propiamente dicha, pero también en Papo que, aunque hace una presentación mucho más resumida, sí se esfuerza en la parte inicial porque quede claramente explicado el instrumento mecánico. De hecho, es casi más sencilla la explicación de este último, centrándose en los triángulos rectángulos *AEF, MZK* y *NHG* de la proposición 3.2, que la de Eutocio sobre los paralelogramos *AEZV*, *VZHI* e *IHCD* de la proposición 3.1.

No obstante, es interesante observar que las dos demostraciones adolecen de la correspondiente construcción geométrica típica de las pruebas de Euclides en las que, con la ayuda exclusiva de la regla y el compás, se deberían obtener exactamente los segmentos buscados. En su lugar se recurre a una construcción mecánica, utilizando el mesolabio, para alinear cuatro puntos clave mediante el movimiento de unos triángulos o rectángulos. Esta construcción no es geométricamente exacta, sino mecánicamente intuitiva, y resulta tan perturbadora en el seno de la tradición geométrica griega que, a pesar del prestigio que tenía su autor, no tardó en provocar la crítica de alguno de los matemáticos contemporáneos de Eratóstenes.

En todo caso ambos documentos han permitido preservar la aportación realizada por Eratóstenes al problema de la duplicación del cubo, que en otro caso se habría perdido irremisiblemente, incidiendo en su preocupación por las aplicaciones de la geometría, y contribuyendo, junto con su medida de la circunferencia terrestre y con otras muchas referencias a su trabajo en diferentes campos que encontramos en sus discípulos y sucesores, a proporcionarnos una visión de lo que supusieron sus descubrimientos para el desarrollo de la ciencia en el mundo griego.

Agradecimientos

El autor desea agradecer a los editores de la revista *Llull*, así como a los dos revisores anónimos, sus comentarios y sugerencias que han permitido mejorar el contenido y la redacción final del artículo.

Bibliografía

Aristóteles (2015) *Acerca del Cielo, Meteorológicos*. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 229, 3ª edición. Madrid, Editorial Gredos, Introducción, traducción y notas de Miguel Candel.

Arquímedes (2009) *Tratados II*. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 378. Madrid, Editorial Gredos. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García.

Arquímedes y Eutocio (2005) *Tratados I y Comentarios*. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 333. Madrid, Editorial Gredos. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García.

Aujac, Germaine (2001) *Eratosthène de Cyréne, le pionnier de la géographie. Sa measure de la circonférence terrestre,* París, Éditions du C.T.H.S.

Bagnall, Roger (2002) "Alexandria: Library of Dreams". *Proceedings American Philosophical Society, 146(4)*, 348-362.

Capella, Marciano (2023) *Nupcias de Filología y Mercurio*. Tomo III.1, Libros VI-VII, El quadrivium. Madrid, Editorial CSIC, Coordinador: Fernando Navarro Antolín. Traducción de Eulogio Baeza Angulo,

Carman, Christián Carlos y Evans, James (2015) "The Two Earths of Eratosthenes". *Isis*, *106(1)*, 1-16.

Cleomedes (2004) *Cleomedes' Lectures on Astronomy: A translation of the Heavens*. Berkeley-Los Ángeles-London, University of California Press. Introducción y Comentario por Alan C. Bowen y Robert B. Todd.

Diller, Aubrey (1949) "Measurements of the Earth". *Isis*, *40(1)*, 6-9.

Escolar, Hipólito (2001) *La Biblioteca de Alejandría,* 1ª edición, 2ª reimpresión. Madrid, Editorial Gredos.

Estrugas, Gemma (2005) "La Biblioteca de Alejandría". *TK*, *17*, Apéndice Alejandría, 1-16. Disponible en: https://www.asnabi.com/revista/tk17/33estrugas.pdf

Euclides (1991-1994-2008) *Elementos,* 3 vols. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 155, 191 y 228. Madrid, Editorial Gredos. Introducción de Luis Vega, Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños.

Heath, Sir Thomas (1981) *A History of Greek Mathematics,* 2 vol. New York, Dover Publications, Inc.

Pappus of Alexandria (2023) *Book III of the Mathematical Collection*. Traducción y Comentario por John B. Little, Worcester, Holy Cross Bookshelf, 63.

Platón (1987) *Diálogos II (Gorgias, Menéxeno, Eutidimio, Menón y Crátilo)*. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 61. Madrid, Editorial Gredos. Introducciones, traducciones y notas por J. Calonge Ruiz, E. Acosta Méndez, F. J. Oliver y J. L. Calvo.

Plinio Secundo, Gayo (1982) *Historia Natural*. Tesis y trabajos académicos de la Universidad de Sevilla. Traducción de Rogelio Fortea Romero. Dirección de Juan Gil Fernández.

Plutarco (2006) *Vidas Paralelas III, Marcelo*. Colección "Biblioteca Clásica Gredos", 354. Madrid, Editorial Gredos. Introducción, traducción y notas de Paloma Ortiz García.

Proclus (1970) *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press. Traducción con Introducción y Notas de Glenn R. Morrow.

Saito, Ken (1995) "Doubling the Cube: A New Interpretation of its Significance for Early Greek Geometry". *Historia Mathematica*, *22*, 119-137.
Salinas, Augusto (2002) "Eratóstenes y el Tamaño de la Tierra (s. III a.C.)". *Revista de Geografía Norte Grande*, *29*, 143-148.
Shcheglov, Dimitry (2018) "The so-called *Itinerary Stade* and the Accuracy of Eratosthenes' Measurement of the Earth". *Klio*, *100(1)*, 153-177.
Vera, Francisco (1970) *Científicos griegos, vol. I.* Madrid, Editorial Aguilar.