

ESTABILIDAD Y CAOS: UNA TRAVESÍA ENTRE LAS MATEMÁTICAS, LA FÍSICA Y LAS CIENCIAS DE LA VIDA

Stability and chaos: a journey through mathematics, physics, and the life sciences

JOSÉ M. RODRÍGUEZ SANJURJO

Universidad Complutense de Madrid

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España

ORCID: 0000-0003-2894-7733

Resumen

Este artículo examina la evolución del concepto matemático de caos desde sus raíces en la mecánica celeste hasta sus aplicaciones contemporáneas en otras ciencias, en particular las de la vida. A través de un recorrido histórico que abarca desde Newton y Laplace hasta Poincaré, Lorenz y Feigenbaum, se muestra cómo la búsqueda de estabilidad en el mundo físico reveló la coexistencia de orden y desorden como rasgos complementarios. La teoría del caos, al describir la sensibilidad a las condiciones iniciales y la aparición de estructuras complejas en sistemas deterministas, transformó la noción clásica de predictibilidad. El texto destaca su impacto interdisciplinar, especialmente en el estudio de sistemas biológicos, neuronales y económicos, y reflexiona sobre sus implicaciones epistemológicas: la ciencia moderna concibe la naturaleza no como un sistema cerrado, sino como un proceso dinámico y abierto, en que orden e incertidumbre coexisten en equilibrio.

Abstract

This article explores the evolution of the mathematical concept of chaos, tracing its development from its origins in celestial mechanics to its contemporary applications in other sciences, particularly the life sciences. Through a historical journey spanning from Newton and Laplace to Poincaré, Lorenz, and Feigenbaum, it shows how the search for stability in the physical world gradually revealed order and disorder as complementary features. Chaos theory, by highlighting sensitivity to initial conditions and the emergence of complex structures within deterministic systems, reshaped the classical notion of predictability. The text underscores its interdisciplinary impact, especially in the study of biological, neural, and economic systems, and reflects on its epistemological implications: modern science no longer views nature as a closed system, but rather as a dynamic and open process in which order and uncertainty coexist in balance.

Palabras clave: Estabilidad, caos, no linealidad, atractor de Lorenz

Keywords: Stability, chaos, nonlinearity, Lorenz attractor

Recibido: 05/11/2025 – *Aceptado:* 22/01/2026

<https://doi.org/10.47101/llull.2026.49.98.rodriquez>

 VOL. 49 (N.º 98) 2026 - ISSN: 0210-8615 (impresa) / 3020-6014 (en línea), pp. 55-83

Copyright: ©2026 Los autores. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0), debiendo otorgar el crédito adecuado al autor o a los autores originales y a la fuente.

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo se propone examinar la compleja y a menudo paradójica relación entre estabilidad y caos, dos nociones cuya tensión ha nutrido tanto la reflexión filosófica como el avance científico. Para ello, se traza un recorrido que comienza con los orígenes y el desarrollo histórico de estas categorías en los dominios de la física y las matemáticas, campos en los que adquirieron su formulación más rigurosa. Este itinerario culmina con la exposición de diversas aplicaciones de la denominada teoría del caos en otras disciplinas científicas, así como con una breve referencia a sus implicaciones filosóficas, con el propósito de mostrar no solo la amplitud de su alcance, sino también su relevancia en la configuración del pensamiento científico contemporáneo.

Desde los primeros intentos de Newton por formular una mecánica regida por leyes universales hasta los desarrollos contemporáneos de la teoría de sistemas dinámicos, la historia de la ciencia ha estado atravesada por la búsqueda de un orden estable capaz de describir el comportamiento del mundo físico. Sin embargo, el estudio de fenómenos como el problema de los n cuerpos mostró pronto los límites de esta aspiración. Lo que comenzó siendo un esfuerzo por consolidar el determinismo laplaciano —según el cual el conocimiento exacto de las condiciones iniciales permitiría prever el futuro con precisión absoluta— desembocó, con los trabajos de Poincaré, en el descubrimiento de comportamientos impredecibles en sistemas regidos por leyes estrictamente deterministas. Esta constatación inauguró una nueva sensibilidad científica: el reconocimiento de que la regularidad y la irregularidad, la estabilidad y la inestabilidad, no son opuestos excluyentes, sino dimensiones complementarias de la naturaleza.

La teoría del caos, consolidada a lo largo del siglo XX gracias a las contribuciones de matemáticos y físicos como Smale, Lorenz y Feigenbaum, ofrece un marco unificador para entender cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un proceso pueden dar lugar a evoluciones radicalmente distintas. Esta sensibilidad, más que un inconveniente operativo, pone de manifiesto la complejidad estructural de los sistemas no lineales. Su análisis ha permitido reformular los criterios de predictibilidad, identificar la formación de correlaciones y patrones estadísticos en regímenes caóticos y, en última instancia, reconsiderar los fundamentos de la relación entre determinismo y aleatoriedad.

Más allá del rigor formal que caracteriza su desarrollo matemático, la noción de caos ha sido incorporada en ámbitos donde dicho rigor no puede mantenerse de manera absoluta. El carácter interdisciplinar de la teoría del caos ha favorecido su aplicación a campos tan diversos como la biología, la economía y las ciencias sociales. En estos contextos, el caos se ha interpretado —aunque no sin controversias— como una posible forma de complejidad organizada. Fenómenos como los sistemas vivos, los ecosistemas, las dinámicas neuronales o los mercados financieros parecen manifestar, en distintos grados, una coexistencia de orden y fluctuación que podría sostener un equilibrio dinámico.

Más allá de sus aplicaciones técnicas, la teoría del caos plantea cuestiones epistemológicas de gran envergadura. La imposibilidad de una predicción absoluta no implica la renuncia al

conocimiento, sino el reconocimiento de sus límites. Diversos autores —entre ellos el premio Nobel Ilya Prigogine— sostienen que el caos conduce a una nueva concepción de la naturaleza: no como un sistema completamente predecible y cerrado, sino como un proceso dinámico y abierto, en el que la incertidumbre desempeña un papel constitutivo en la generación de complejidad y de comportamientos emergentes. No obstante, el alcance real de esta interpretación sigue siendo objeto de debate, y conviene abordarla con la cautela que exige su carácter todavía en parte especulativo.

2. ESTABILIDAD Y CAOS

En esta sección analizamos cómo el ideal de regularidad y orden en la naturaleza ha enfrentado limitaciones y fenómenos imprevistos.

2.1. Antecedentes y desarrollo histórico

Un ejemplo clásico que ilustra la relación entre estabilidad y caos es el denominado problema de los n cuerpos. Sus raíces se remontan al estudio del movimiento planetario y, pese a siglos de investigación, sigue siendo un desafío para la física y las matemáticas. Este problema, lejos de haber sido resuelto, ha servido como un catalizador en el desarrollo de la teoría del caos, evidenciando las limitaciones de los modelos deterministas y la aparición de comportamientos impredecibles en sistemas dinámicos complejos.

El *problema de los n cuerpos* consiste en determinar las trayectorias de n masas puntuales que interactúan entre sí exclusivamente bajo la fuerza de la gravitación universal. En otras palabras, dado un conjunto de condiciones iniciales —posiciones y velocidades de cada cuerpo—, se trata de predecir su movimiento futuro resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna su dinámica. Aunque el caso de dos cuerpos admite una solución exacta y bien conocida gracias a los trabajos de Kepler y Newton, la situación se vuelve extraordinariamente compleja a partir de tres cuerpos, y más aún cuando el número aumenta. De ahí que el problema se haya convertido en uno de los grandes retos de la física y de las matemáticas.

La primera formulación matemática del problema es debida a Isaac Newton. En su obra fundamental, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural) [NEWTON, 1687], partiendo de la premisa de que la gravedad es la causa del movimiento de los planetas, empleó procedimientos geométricos para describir las interacciones entre los cuerpos celestes. Fue en esta obra donde articuló la esencia de su nuevo método de manera concisa, que expresaría posteriormente de la siguiente manera: “*Data aequatione quocumque fluentium quantitatum, involvente fluxiones, invenire; et viceversa*” (Dada una ecuación que involucra cualquier número de cantidades fluentes, encontrar la fluxión y viceversa).¹

1. Véase TURNBULL [1960, p. 159].

El caso más simple, cuando un cuerpo orbita alrededor de otro, había sido abordado por Johannes Kepler, quien formuló sus leyes del movimiento planetario de forma empírica a partir de las regularidades matemáticas que encontró en las meticulosas observaciones del astrónomo Tycho Brahe. Newton utilizó argumentos geométricos para dar una demostración de las leyes de Kepler. Sin embargo, la solución analítica de este caso —que consiste en obtener directamente a partir de las ecuaciones diferenciales las órbitas keplerianas— solo fue alcanzada en 1710 por Johann Bernoulli.

Los numerosos intentos por encontrar una solución completa para el problema de los n cuerpos para n mayor que 2 han impulsado un progreso significativo en el campo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, a pesar de los avances, sigue siendo un desafío abierto, lo que demuestra la complejidad inherente a estos sistemas y la fascinación que despiertan.

Un aspecto crucial del problema de los n cuerpos, que ha ocupado a matemáticos y astrónomos por siglos, es la estabilidad del sistema solar. La pregunta central era si las órbitas planetarias se mantendrían estables a lo largo del tiempo, evitando colisiones, escapes de planetas o su absorción por el Sol. Pierre-Simon Laplace se aventuró a resolver este aspecto del problema [LAPLACE, 1799-1825]. Concibió el sistema solar como un conjunto de planetas que obedecen las leyes de Kepler, describiendo órbitas elípticas alrededor del Sol, mientras se influyen mutuamente por sus fuerzas gravitatorias. Para abordar el problema, formuló un sistema de ecuaciones en términos de la excentricidad y la inclinación de las órbitas planetarias. En su análisis, fue capaz de calcular la primera aproximación de las soluciones en serie para estas ecuaciones y demostró que, en este nivel de aproximación, la excentricidad y la inclinación permanecen acotadas, registrando únicamente pequeñas oscilaciones. También demostró que la longitud del eje mayor —es decir, la mayor distancia entre dos puntos de la órbita— permanecía constante en el tiempo. Su hallazgo fundamental puede resumirse así: en la aproximación de primer orden respecto de las excentricidades, los ejes mayores no presentan términos seculares, es decir, dependientes del tiempo y, por tanto, el tamaño de las órbitas y la energía orbital son esencialmente estables. De haberlos mostrado, la inestabilidad del sistema habría quedado probada; por el contrario, la ausencia de tales términos en la solución aproximada era compatible con la estabilidad. Es decir, dentro de esa aproximación, las órbitas son estables, sin riesgo de fenómenos catastróficos, al menos durante millones de años. Sin embargo, estas conclusiones se limitan a la aproximación lineal; Laplace no consideró los efectos de segundo orden ni las interacciones no lineales que, según estudios posteriores de Poincaré y desarrollos modernos de la teoría KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), pueden introducir comportamientos sumamente complicados. Por lo tanto, si bien su trabajo fue un avance fundamental para la comprensión de la dinámica planetaria, no constituye una prueba definitiva de la estabilidad absoluta del sistema solar.

A este respecto, son ilustrativas las palabras de Jürgen Moser, citadas en Diacu y Holmes [1996, p. 127]:

¿Es estable el sistema solar? Propiamente hablando la respuesta es aún desconocida, y sin embargo esta cuestión ha llevado a resultados muy profundos que probablemente son más importantes que la cuestión original.

En otro orden de cosas, no podemos dejar de mencionar que Laplace es uno de los principales proponentes del llamado *determinismo* causal. En concreto, el siguiente párrafo se puede encontrar en otra de sus obras clásicas [LAPLACE, 1951, p. 4]:

Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría concebir un intelecto que en cualquier momento dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen; si este intelecto fuera lo suficientemente vasto como para someter los datos a análisis, podría condensar en una simple fórmula el movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro, así como el pasado, estarían frente a sus ojos.

La existencia del intelecto al que se refiere, conocido en ocasiones como “demonio de Laplace”, ha quedado más que cuestionada por desarrollos posteriores de la física y las matemáticas.

Volviendo al problema de los n cuerpos, fue Henri Poincaré quien, a fines del siglo XIX, dio un paso decisivo que sitúa el tema en el contexto que nos ocupa en este artículo. En aquel tiempo era frecuente convocar competiciones que tenían como fin encontrar soluciones a problemas matemáticos específicos. Una de ellas fue convocada en 1885 por Gösta Mittag-Leffler, profesor de matemáticas en la Universidad de Estocolmo y fundador y editor de la revista *Acta Mathematica*. La ocasión fue la celebración del 60.º cumpleaños de Oscar II, rey de Suecia y de Noruega, quien tenía un gran interés por la ciencia y se mantuvo cercano a las iniciativas científicas del momento. En particular, financió la creación de *Acta* y la competición a la que nos referimos. Mittag-Leffler había discutido previamente la idea con Sofya Kovalevskaya, una matemática que mantenía trato cordial con el rey y que dejó una interesante descripción del mismo en su autobiografía [KOVALEVSKAYA, 1978, p. 228]:

El rey Oscar es una persona agradable y cultivada. Cuando era joven asistió a clases en la universidad y desde entonces muestra interés por la ciencia, aunque desconozco la profundidad de su erudición. No tiene contacto oficial con la universidad, pero es extremadamente solícito con ella y muy amistoso con sus profesores en general y conmigo en particular.

El jurado del premio consistiría en un pequeño comité formado por el propio Mittag-Leffler como editor de *Acta*, junto a Karl Weierstrass (Berlín) y Charles Hermite (París), que eran los matemáticos más prestigiosos de la generación “senior” en aquellos momentos. Desgraciadamente, esta opinión no era compartida por Leopold Kronecker, colega de Weierstrass, quien se resintió por haber sido excluido del comité y escribió una carta a Mittag-Leffler llena de reproches. Era conocida la rivalidad entre ambos matemáticos y, como sugiere la historiadora June Barrow-Green [1997], es probable que se sintiera más agraviado por la inclusión de Weierstrass que por su propia exclusión.

El premio se adjudicaría a la solución de uno de los cuatro problemas no resueltos propuestos por el comité. El más relevante era el siguiente:

Para un sistema de n masas puntuales que se atraen entre sí según las leyes de Newton, suponiendo que dos puntos cualesquier nunca colisionan, encontrar un desarrollo en serie de las coordenadas de cada punto en función del tiempo que converja uniformemente para cualquier periodo de tiempo.

La pregunta parece haber sido planteada por Weierstrass, quien mantenía la esperanza de que se encontrase una solución que, además, sirviera para llegar a la conclusión de que el sistema solar es estable. Las memorias debían ser recibidas antes del 1 de junio de 1888 (tres años después de la convocatoria) en perfecto anonimato. Para ello se solicitaba un logo y un sobre sellado que desvelara el nombre del autor.

Henri Poincaré, el matemático más brillante de la generación joven, se sintió inmediatamente interesado por el problema y, después de tres años de trabajo duro, envió al concurso su memoria *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Poincaré mantenía relaciones con Mittag-Leffler a través de *Acta Mathematica* y, por otra parte, el comité conocía sobradamente su capacidad para enfrentarse al problema, pero estas circunstancias no le impidieron acompañar su memoria con dos cartas firmadas por él, una dirigida a Mittag-Leffler y otra al comité. Se conservan los originales de ambas cartas, que suponían una violación flagrante de las normas del concurso, pero no sería la primera ni la última vez en la historia que un comité juzgase una obra anónima de la que sabía perfectamente quien era su autor.

Como indica el título, Poincaré se concentró en su memoria en el problema restringido de los tres cuerpos en su forma planar. En lugar de considerar los métodos tradicionales de desarrollo en series de las soluciones, adoptó un enfoque cualitativo, utilizando métodos topológicos que impresionaron a Weierstrass. En este problema dos cuerpos se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masas bajo la influencia de su atracción gravitacional mutua, y un tercer cuerpo de masa despreciable, generalmente conocido como planetóide, se mueve en el mismo plano, influenciado por la gravedad de los otros dos, pero sin afectarlos. El problema consiste en describir el movimiento del tercer cuerpo. La formulación del problema requería inicialmente de cuatro variables, necesarias para describir la posición y la velocidad del planetóide. Sin embargo, Poincaré, utilizando una integral de Jacobi, pudo eliminar una de ellas, de modo que cada estado del sistema quedaba representado por un punto en un espacio tridimensional, que no es el espacio físico en que tiene lugar el fenómeno. Después de 300 páginas escritas a mano, conteniendo elaborados argumentos y en las que se incluía el nuevo concepto de invariante integral, Poincaré deducía la estabilidad del sistema. Tras leer el trabajo, Weierstrass envió un corto informe a Mittag-Leffler en el que aseguraba: “Puede decir a su Soberano que este trabajo, aunque no proporciona la solución al problema propuesto, es de tal importancia que su publicación inaugurará una nueva era en la historia de la mecánica celeste”.

El premio fue concedido a Poincaré a principios de 1889, y Paul Appell obtuvo una mención honorífica. Sin embargo, en el periodo inmediatamente anterior a la publicación de su trabajo en *Acta Mathematica*, Poincaré recibió insistentes peticiones de aclaración por parte del matemático Lars Edvard Phragmén, quien afirmaba no entender algunas partes del mismo. Poincaré se sintió obligado a revisar la demostración y descubrió, con alarma, que no podía responder a estas preguntas y, además, que había un grave error en su trabajo. Ante esta situación, envió un mensaje urgente a Mittag-Leffler pidiéndole que detuviera la publicación. Sin embargo, el número de *Acta* que contenía el trabajo de Poincaré ya estaba impreso, y

algunos ejemplares habían sido enviados a diversas instituciones. La reacción inmediata de Mittag-Leffler fue solicitar la devolución de estos números y pedir a Poincaré que reescribiera una versión correcta de su memoria, cosa que hizo Poincaré después de un agónico periodo de trabajo a principios de 1890.

En esta nueva versión, se llegaba a una conclusión sorprendente: Poincaré no solo no había demostrado la estabilidad, como aseguraba en la primera memoria, sino que el sistema presentaba un movimiento caótico, según la terminología de nuestros días. Este movimiento evidencia una forma de inestabilidad, aunque no la forma clásica que implica colisiones o cuerpos expulsados del sistema.

En la memoria se establece la existencia de soluciones periódicas acompañadas de trayectorias doblemente asintóticas. Cada una de estas trayectorias se aproxima gradualmente a una solución periódica formando espirales, tanto cuando el tiempo tiende a infinito como a menos infinito. Para simplificar su análisis, Poincaré concibió un método ingenioso para analizar la situación: consideró una sección plana del flujo dispuesta transversalmente a la órbita periódica, y examinó las intersecciones con este plano de las órbitas cercanas. Un plano que interseca el flujo de modo transversal es conocido desde entonces como sección de Poincaré. Las sucesivas intersecciones definen lo que hoy conocemos como un sistema dinámico discreto. De esta manera, el problema se reduce a uno de dimensión 2. Básicamente, el método consiste en considerar la órbita en la que yace cada punto de la sección y hacer corresponder a este punto la siguiente intersección de la órbita con la sección, lo que define una aplicación f de la sección de Poincaré (o una región de ella) en sí misma. Esta construcción se puede hacer también para tiempos negativos. El sistema discreto consiste en esta aplicación f y sus sucesivas iteraciones, f^n con n positivo o negativo.

La situación es ahora más sencilla, aun cuando conserva un alto grado de complejidad. En la sección de Poincaré, la trayectoria periódica es vista como un punto fijo p_0 , y las trayectorias doblemente asintóticas se manifiestan como órbitas discretas que se aproximan a este punto fijo, tanto en la dirección de tiempo positivo como negativo. Es decir, para cualquier punto p de esta órbita discreta se tiene que $f^n(p)$ tiende al punto fijo p_0 cuando n tiende a infinito y también cuando n tiende a menos infinito. Un punto p de estas características se denomina homoclínico. En nuestro caso, se trata específicamente de un *punto homoclínico transversal*. Esta terminología, sin pretensiones de rigor matemático, indica que su órbita se encuentra en la intersección de dos curvas (la variedad estable y la inestable del punto fijo p_0) que se cortan de forma transversal en el punto p . Esta característica de transversalidad de la trayectoria homoclínica es la fuente del error de Poincaré, que no había considerado su posibilidad. En su revisión del trabajo, comprendió de inmediato la gran complejidad que esta situación generaba, demostrando que la existencia de un punto homoclínico transversal p asociado a un punto fijo p_0 en la sección de Poincaré tiene profundas implicaciones en la dinámica del sistema. En particular demostró que su existencia conlleva la presencia de una infinidad de puntos homoclínicos arbitrariamente cercanos a p . También queda de manifiesto la propiedad de *dependencia sensible de las condiciones iniciales*, según la cual una pequeña diferencia en las condiciones iniciales de un sistema puede dar

lugar a evoluciones muy diferentes en estados posteriores, haciendo que sea imposible predecir su comportamiento a largo plazo. Esta forma de inestabilidad es de importancia crucial, y contradice la expectativa de que puntos próximos del sistema tengan evoluciones parecidas. Visualizar la situación descrita requiere un esfuerzo considerable de imaginación. Años más tarde, George David Birkhoff demostraría que p es un punto de acumulación de una cantidad infinita de puntos periódicos del sistema discreto, abarcando todos los periodos posibles [BIRKHOFF, 1935, 1950, 1966]. Una prueba sencilla de este resultado se puede encontrar en Mrowka [1985].

Después de la retirada del volumen de *Acta* que contenía la memoria original de Poincaré, éste se vio obligado a contribuir con una cantidad sustancialmente superior al premio recibido para sufragar la impresión de una nueva versión, que consta de 270 páginas y fue publicada también en *Acta Mathematica* [POINCARÉ, 1890]. En la introducción reconoce la existencia de un error en la versión previa, aunque no ofrece ninguna aclaración sobre su naturaleza, pero sí un reconocimiento del papel jugado por Phragmén. Los resultados de Poincaré fueron posteriormente recogidos en los tres volúmenes de *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [POINCARÉ, 1892-1899].

En el trabajo de Poincaré se establece la imposibilidad de encontrar una solución general del problema en forma cerrada, es decir mediante una fórmula finita utilizando funciones elementales. Esta es la razón de que se viera obligado a adoptar un enfoque cualitativo sobre el comportamiento de las soluciones sin conocerlas en detalle. Sin embargo, entre 1907 y 1912 el matemático finlandés Karl Sundman publicó algunos artículos donde dio una solución general en términos de series convergentes, véase en particular [SUNDMAN, 1912]. Se trata de un resultado de considerable importancia teórica, pero de limitadas aplicaciones prácticas debido a la convergencia extremadamente lenta de las series. Por otra parte, también se encontrarían más tarde soluciones que involucran colisiones triples (donde los tres cuerpos se encuentran simultáneamente en un punto) y otras en las que un cuerpo es expulsado del sistema con velocidad arbitrariamente alta.²

Una comprensión más profunda de los fenómenos que se ponen de manifiesto en el trabajo de Poincaré se lograría más tarde gracias a las contribuciones de Stephen Smale, quien introdujo su famosa *herradura de Smale*, una construcción topológica de la que se desprendería la existencia de un conjunto de Cantor dotado de estructura de sistema dinámico discreto (llamado de Bernoulli). Este conjunto se compone de sucesiones bilaterales (infinitas en ambas direcciones) formadas por los símbolos 0 y 1 dotadas de una conveniente definición de distancia entre ellas que lo convierten en un espacio métrico. Un ejemplo es una sucesión del tipo $(\dots, 1, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 1, 0, 1, \dots)$. El sistema, a su vez, está regido por una aplicación de desplazamiento s (shift map) que mueve cada símbolo a su izquierda: $(\dots, 1, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 1, 0, 1, \dots) \rightarrow (\dots, 1, 0, 1, 0, 0, \underline{1}, 1, 0, 1, \dots)$.

2. Ver, por ejemplo, McGEHEE [1974].

El sistema presenta características notables:

1. s es un homeomorfismo. Es decir, una transformación biyectiva, continua y cuya inversa es también continua. Estas transformaciones conservan las propiedades topológicas.

2. Tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

3. El conjunto de órbitas periódicas es denso, lo que significa que para todo punto del sistema hay alguna órbita periódica tan cerca de él como queramos (la órbita depende del grado de proximidad exigido). Esto es consecuencia de que las sucesiones periódicas (por ejemplo, 010101...) forman un conjunto denso en el espacio.

4. Existe una órbita densa, es decir, una órbita que se aproxima arbitrariamente a cualquier punto del sistema.

Las propiedades 2, 3 y 4 anteriores son la definición formal de un sistema caótico generado por el homeomorfismo s (más propiamente, por el sistema dinámico discreto definido por s).

Como consecuencia del trabajo de Smale sobre difeomorfismos con puntos homoclínicos transversales [SMALE, 1967], se obtiene que la aplicación f de la sección de Poincaré (o, más precisamente, una de sus potencias) satisface las propiedades 2, 3 y 4 enumeradas. De hecho, la demostración de Smale hace posible definir una inmersión topológica del sistema de Bernoulli como subsistema del sistema de Poincaré definido por f (o por una de sus potencias). Con ello, se estableció de manera rigurosa la existencia de caos en el problema restringido de los tres cuerpos.

En Gray [1992], Diacu y Holmes [1996], Barrow-Greene [1997] y Ragstedt³ se puede encontrar información adicional sobre los hechos que acabamos de describir.

La investigación sobre mecánica celeste continúa siendo un tema de gran relevancia en la actualidad. Así, en Kristiansen y Ortega [2024], los autores parten de la constatación de que los planetas mayores del sistema solar, con la excepción de Mercurio, presentan órbitas aproximadamente circulares, un fenómeno no previsto por la teoría de Kepler y que parece estar vinculado a efectos de fricción. En el trabajo se lleva a cabo un análisis riguroso del problema y se identifica el conjunto de condiciones iniciales que conducen a soluciones con la propiedad de circularidad, siempre que se cumpla una condición específica que modela el tipo de fricción considerado. Como consecuencia, los autores demuestran que ciertos resultados clásicos que aseguraban la circularidad para todo valor temporal son incorrectos. Este problema cuenta con una larga tradición en la literatura científica y ha sido abordado, entre otros, por Poincaré. Por otra parte, son muy interesantes los aspectos relacionados con la captura asistida por caos de objetos en el sistema solar o la existencia de conexiones homoclínicas y heteroclínicas en la búsqueda de trayectorias para misiones espaciales.⁴

3. RAGSTEDT, Mikael "Prize Competition. From Order to Chaos: The Prize competition in Honour of King Oscar II". <https://www.mittag-leffler.se/about-us/history/prize-competition/> (Consulta: octubre de 2025).

4. En relación con este tema, pueden consultarse ASTAKHOV *et al.* [2003], LEE *et al.* [2007] y PANG *et al.* [2025].

Muchos años después de los resultados de Poincaré, se presentarían nuevamente fenómenos de naturaleza similar a los descritos de manera inesperada. El meteorólogo y matemático Edward N. Lorenz desarrolló en su trabajo un modelo que representaba una simplificación extrema de las ecuaciones de la dinámica atmosférica [LORENZ, 1963]. Su objetivo era investigar la posibilidad de predecir el tiempo en una atmósfera idealizada reducida a sólo dos dimensiones.

Lorenz basó su modelo en las ecuaciones de la convección de Rayleigh-Bénard, un fenómeno en el que un fluido se calienta desde abajo y se enfría desde arriba. De este modo se produce un flujo en el que el fluido caliente asciende por el centro y el frío desciende por los bordes. Para simplificar estas complejas ecuaciones, las redujo a un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales con solo tres variables:

- X: Proporcional a la intensidad del flujo de convección.
- Y: Proporcional a la diferencia de temperatura entre la corriente ascendente y la descendente.
- Z: Proporcional a la variación vertical de temperaturas.

Estas ecuaciones son:

1. $dX/dt = \sigma(Y - X)$
2. $dY/dt = X(\rho - Z) - Y$
3. $dZ/dt = XY - \beta Z$

Donde σ , ρ y β son parámetros que representan el número de Prandtl, el número de Rayleigh y una dimensión geométrica del sistema, respectivamente. En rigor, se tiene no un sistema sino una infinidad de sistemas según se elijan los parámetros. Los llamados parámetros clásicos considerados por Lorenz son $\sigma=10$, $\rho=28$, $\beta=8/3$.

Lorenz integró numéricamente las ecuaciones para ciertos valores iniciales en un ordenador, y al repetir uno de sus cálculos con valores iniciales ligeramente diferentes—redondeando de 0.506127 a 0.506—, los resultados se desviaron enormemente del original con el tiempo. Como él mismo relata [LORENZ, 1993], quedó enormemente impresionado al darse cuenta de que, si la atmósfera real se comportaba como este modelo simplificado, entonces la predicción del tiempo a largo plazo sería imposible. En realidad, su modelo estaba poniendo de manifiesto la dependencia sensible de las condiciones iniciales. Por otra parte, la visualización de los resultados experimentales sugería fuertemente la existencia de un atractor. El término se refiere a un conjunto de estados, representado en este caso por un subconjunto del espacio tridimensional, hacia el que un sistema dinámico evoluciona con el tiempo. Este atractor tenía propiedades mucho más complicadas que las habituales en dinámica, y la dependencia sensible era solo una de ellas. De hecho, parecía satisfacer todas las propiedades del caos enumeradas anteriormente. Sin embargo, dada la naturaleza experimental de los resultados, la existencia de tal atractor no quedaba matemáticamente establecida. Lorenz relata como en 1971 conoció en un congreso en La Jolla, California, al matemático francés David Ruelle, quien presentó allí sus resultados en los que daba una explicación matemática

de la turbulencia de los fluidos, fenómeno insuficientemente conocido, en términos de un nuevo concepto que él denominaba *atractor extraño*. Lorenz se percató inmediatamente de que él mismo se había encontrado con uno: el de su modelo atmosférico. Este atractor se ha convertido en un hito de la teoría de sistemas dinámicos, y su imagen ha sido reproducida en los más diversos lugares, tanto por la riqueza de fenómenos que ejemplifica como por sus indudables cualidades estéticas.

Lorenz también se percató de que el estudio de sus ecuaciones encajaba perfectamente en la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos desarrollada por Birkhoff [1966] y en el marco de la teoría de estabilidad de Lyapunov, sistematizada por Coddington y Levinson [1955] y Nemytskii y Stepanov [1960], publicados poco tiempo antes. Aunque en un principio el trabajo de Lorenz no salió del ámbito de la meteorología, pronto llegó al conocimiento de la comunidad de sistemas dinámicos a través de los matemáticos James A. Yorke y Stephen Smale. Asimismo, topólogos como Joan S. Birman y Robert F. Williams observaron que las órbitas periódicas del atractor (en realidad, de modelos geométricos simplificados del atractor definidos por Guckenheimer, Afraimovich, Shilnikov y el propio Williams) presentan diversos tipos de nudos de indudable interés topológico. Estos autores codificaron esas órbitas y probaron que, entre otros, están presentes todos los nudos tóricos [BIRMAN y WILLIAMS, 1983].

Por otra parte, Mischaikow y Mrozek [1995] demuestran la existencia de fenómenos caóticos en el sistema. No obstante, la demostración rigurosa de la existencia del atractor permaneció elusiva durante mucho tiempo, a pesar de muchos intentos. Su relevancia fue tal que Smale incluyó esta cuestión en su lista de 1998, que enumeraba los 18 problemas no resueltos más importantes que deberían ser el principal reto de los matemáticos durante el siglo XXI. Sorprendentemente, Warwick Tucker [2002] logró demostrar poco después la existencia del atractor y también que es topológicamente equivalente al modelo geométrico anteriormente mencionado. Su prueba emplea métodos numéricos rigurosos y es, en parte, asistida por ordenador. Este procedimiento, que podría suscitar dudas sobre la demostración, ha sido sin embargo validado utilizando el sistema de verificación formal Isabelle/HOL, un asistente de pruebas que asegura la corrección lógica de los algoritmos. La prueba de Tucker es correcta porque combina métodos teóricos sólidos con cálculos computacionales rigurosos, utilizando herramientas como la aritmética de intervalos que eliminan los errores típicos de las aproximaciones numéricas.⁵

Es crucial distinguir que el atractor de Lorenz es un atractor local y, como tal, constituye un subconjunto propio del atractor global del sistema, con el cual no debería ser confundido, a pesar de que la literatura registra ocasionales imprecisiones al respecto. El atractor de Lorenz se ha consolidado como un arquetipo fundamental en el área de los sistemas dinámicos y continúa siendo objeto de investigación intensiva. Entre los temas explorados se encuentran sus propiedades topológicas, como su tipo de homotopía de Čech (o forma de Borsuk) [SANJURJO, 2003, 2007], así como la evolución del sistema al mantener constantes los

5. Para una exposición detallada de todo lo anterior, consultar VIANA [2000].

parámetros σ y β en los valores clásicos, mientras varía ρ . Para valores inferiores a un umbral crítico, emerge un «conjunto extraño» que aún no constituye un atractor, pero que se transforma en el atractor de Lorenz al superar ese umbral. Este proceso puede analizarse [BARGE, 2020] mediante la teoría del índice de Conley, la cual revela el papel de los denominados *repulsores viajeros*, que aparecen de manera transitoria y facilitan la transición entre regímenes dinámicos, transportando la inestabilidad a través de bifurcaciones que modifican la estructura del atractor global, preservando sin embargo la continuidad topológica. Este atractor es un caso particular especialmente importante en el mundo de los atractores, un universo cuya riqueza topológica se pone de manifiesto, por ejemplo, en Giraldo *et al.* [2005] y Sanchez-Gabites [2011].

Es pertinente destacar que Mary L. Cartwright y John E. Littlewood habían publicado anteriormente el artículo en el que se ponían de manifiesto fenómenos muy similares a los descritos [Cartwright y Littlewood, 1945]. Su investigación no surgió de un interés puramente teórico, sino de un problema práctico. Durante la Segunda Guerra Mundial, la Junta de Investigación de la Radio Británica solicitó asistencia para comprender el comportamiento errático de los circuitos de radio empleados en los sistemas de radar, que comprometía la utilización de estos. Estos circuitos podían modelarse mediante una versión forzada de la ecuación de Van der Pol. En el artículo conectaban las observaciones empíricas de los ingenieros sobre las oscilaciones de radio con un marco teórico matemático riguroso. Al analizar la ecuación, Cartwright y Littlewood no solo encontraron las esperadas oscilaciones periódicas, sino también soluciones que eran no periódicas y muy complejas. Se dieron cuenta de que una pequeña variación en las condiciones iniciales de la ecuación o en los parámetros del sistema podía llevar a trayectorias completamente diferentes, impredecibles a largo plazo, que configuraban lo que Littlewood llamó una “dramática estructura fina” y que mostraban un patrón caótico. Eso fue una luz para los ingenieros que, en sus esfuerzos por mitigar el problema, empezaron a mantener los equipos de radar dentro de rangos operativos predecibles, evitando así el comportamiento caótico. Aunque Cartwright y Littlewood estuvieron al borde de conceptualizar lo que hoy conocemos como caos determinista, no llegaron a identificar sus hallazgos como el germen de un nuevo campo de estudio. Este hecho fue reflejado por el distinguido físico Freeman Dyson, quien, al recordar una conferencia de Cartwright, expresó:⁶

Quando escuché la conferencia de Cartwright recuerdo haber quedado encantando con la belleza de los resultados. Pude ver la belleza de su trabajo, pero no pude ver su importancia. Me dije: “Este es un hermoso trabajo. Qué lástima que se trate sólo de un problema práctico de tiempos de guerra y no de matemáticas reales”. No dije: “Este es el nacimiento de un nuevo campo de las matemáticas”. Compartí los gustos y prejuicios de mis contemporáneos.

Una evolución posterior tendría lugar en 1971 cuando David Ruelle y Floris Takens publicaron el artículo donde se llevaba a cabo un estudio seminal sobre el fenómeno de la

6. Cita en RODRÍGUEZ, Margarita (2019) <https://www.bbc.com/mundo/noticias-47365093> (Consulta: octubre de 2025).

turbulencia de fluidos, revisando y cuestionando algunas de las ideas previas presentadas por Lev Landau y Yakov Lifschitz [RUELLE y TAKENS, 1971]. Los autores demostraron que ciertas afirmaciones de estos investigadores no se ajustaban totalmente a la realidad en el caso de un fluido viscoso, y propusieron una reformulación de las mismas. En su análisis, Ruelle y Takens consideraron un fluido sometido a una acción externa (bombeo, calentamiento, etc.) medida por un parámetro de control μ . Cuando $\mu = 0$ el fluido está en reposo (equilibrio), cuando μ es mayor que 0 el fluido transita primero a un estado estable en el que los parámetros que lo definen en cualquier punto, en particular la velocidad, son constantes en el tiempo, aunque el sistema ya no está en equilibrio. Para valores mayores de μ el comportamiento se torna periódico, y finalmente, para valores muy elevados, se hace irregular y complejo, registrándose lo que se llama turbulencia.

Ruelle y Takens modelaron un fluido viscoso e incompresible que ocupa una región D del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Ignorando los efectos térmicos, el comportamiento del fluido se describe mediante el campo de velocidades en cada punto de D . Para ello consideraron el espacio H de campos de velocidad sobre D , que es un espacio vectorial infinito dimensional. La evolución temporal de un campo de velocidades se rige por las ecuaciones de Navier-Stokes para las que, como es sabido, no se ha demostrado ningún teorema general de existencia y unicidad. No obstante, los autores asumieron la existencia y unicidad *local* de tales soluciones, lo que les permitió reemplazar H por una variedad diferenciable de dimensión finita y aplicar herramientas de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. La principal conclusión es la identificación de atractores extraños asociados a perturbaciones de ciertos campos de velocidades, particularmente en regímenes de valores elevados de μ [RUELLE y TAKENS, 1971]. Estos atractores extraños proporcionan un marco teórico novedoso para comprender la complejidad intrínseca de la turbulencia. Desde entonces, esta perspectiva ha sido fundamental en las investigaciones sobre la dinámica de fluidos turbulentos, consolidándose como una referencia esencial en el estudio de este fenómeno.

En otro orden de cosas y sin salirnos del marco de la Física, David Ruelle hace la observación de que la mecánica cuántica está gobernada por la ecuación de Schrödinger, que es lineal y, en consecuencia, no genera divergencia exponencial de trayectorias iniciales cercanas, como ocurre en los sistemas con ecuaciones no lineales. Así pues, propiamente hablando, no se puede hablar de caos en mecánica cuántica. Sin embargo, tiene interés estudiar sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico. El caos cuántico investiga cómo las propiedades del límite clásico —como trayectorias impredecibles— se manifiestan en las funciones de onda del sistema. El límite clásico de un sistema cuántico es el régimen en el que las predicciones de la mecánica cuántica coinciden (aproximadamente) con las de la mecánica clásica. Es decir, el punto de transición donde el comportamiento de un sistema descrito por la ecuación de Schrödinger empieza a parecerse al descrito por las ecuaciones que surgen de la formulación newtoniana o de la formulación hamiltoniana. Por ejemplo, los análogos clásicos del llamado “billar cuántico” con paredes irregulares o el átomo de hidrógeno en un campo magnético intenso tienen comportamiento caótico, que se refleja a nivel cuántico en funciones de onda que muestran patrones irregulares y aparentemente aleatorios, aunque

deterministas, con regiones de interferencia complejas. A pesar de que los núcleos atómicos no son caóticos clásicamente porque no tienen un límite claro, Wigner y Dyson encontraron correlaciones entre las propiedades caóticas de algunos sistemas clásicos (como los que acabamos de mencionar) y propiedades estadísticas de las funciones de onda de los sistemas cuánticos de esos núcleos. En consecuencia, el caos cuántico no es el caos en el sentido clásico de trayectorias impredecibles, sino el estudio de cómo el caos clásico se manifiesta en la mecánica cuántica, especialmente en los espectros, funciones de onda y estadísticas de sistemas cuánticos. Una buena referencia es Haake *et al.* [2018].

En el ámbito de la biología, Robert May realizó una contribución notable al explorar modelos matemáticos que describen diferentes aspectos de la dinámica de poblaciones, genética y epidemiología. Estos modelos a menudo se basan en ecuaciones en diferencias que explican cómo evoluciona una cantidad a lo largo del tiempo, donde su valor futuro depende exclusivamente de su valor inmediato anterior. La llamada función logística, $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, es el ejemplo más sencillo de este tipo de modelo. Estas ecuaciones, establecen un sistema dinámico (o semi-dinámico) discreto que depende de un parámetro r .

A pesar de su aparente simplicidad y naturaleza determinista, May demostró que estas ecuaciones exhiben una sorprendente diversidad de comportamientos dinámicos. A medida que se modifica el parámetro r , el sistema pasa de un simple estado estable a una compleja jerarquía de cascadas de ciclos estables, culminando en un régimen caótico. En consecuencia, el análisis de la estructura de las trayectorias suscita una gran cantidad de problemas matemáticos con implicaciones prácticas. En el artículo de *Nature*, May [1976] lleva a cabo un estudio de lo que él denomina análisis fino del régimen caótico. También en un artículo previo [MAY, 1975] realiza un análisis detallado de la ecuación $x_{n+1} = (1 + r) x_n (1 - x_n)$ en el que pone de manifiesto que para valores crecientes de r se registra la siguiente secuencia: *a)* punto de equilibrio estable, *b)* ciclo estable de periodo 2, *c)* ciclo estable de periodo 4, *d)* ciclos estables de periodos 8, 16, 32, etc., *e)* caos para $r > 2,570$. En el régimen caótico hay ciclos de cualquier periodo y una cantidad no numerable de valores iniciales para los cuales el sistema no se asienta en ningún ciclo, aunque, en algunos casos puede converger a uno.

May observó algo fundamental. A pesar de que el caos revela la imposibilidad de hacer predicciones después de un cierto número de pasos temporales, abre, sin embargo, una ventana a hacer predicciones a corto plazo. En el siguiente extracto de su entrevista en la Academia de Ciencias de Australia,⁷ se refiere a las ecuaciones anteriores y afirma lo siguiente:

Una de las características del caos es que, aunque se genere a partir de algo completamente conocido, es tan sensible al punto de partida que no se pueden hacer predicciones más allá de unos pocos pasos temporales. Por otro lado, abre una ventana a una nueva forma de hacer predicciones a corto plazo. Por ejemplo, en un artículo que escribí, mostramos una técnica para hacerlo. Lo escribí con uno de mis exalumnos, un tipo estadounidense muy creativo, George Sugihara. En particular, el generador

7. WILLIAMS, Robyn (2008) "Lord Robert May, physicist and ecologist. Australian Academy of Sciences (Interview. Section Making sense of the chaos)". <https://www.science.org.au/learning/general-audience/history/interviews-australian-scientists/lord-robert-may-physicist-and> (Consulta: octubre de 2025).

de números aleatorios que von Neumann y Ulam usaron para generar números aleatorios para la primera computadora construida fue esa ecuación en particular. La computadora se llamaba MANIAC y fue construida en el Instituto de Estudios Avanzados en 1948. La ecuación que usaron no se habría llamado “aplicación cuadrática” entonces y nadie habría pensado que era caos. Pero para generar sus números aleatorios usaron eso, en el régimen caótico. Si pruebas su generador de números aleatorios con cualquier prueba convencional, dice que son números aleatorios. Pero George y yo, con nuestra técnica, podíamos predecir los siguientes dos, tres o cuatro números aleatorios con alta precisión, aunque no podíamos ir mucho más allá. George aprovechó eso para dirigir Deutsche Bank Securities (EE. UU.) durante cuatro o cinco años, ganando bonos de ocho cifras. Luego, típico de George, después de haberlo hecho durante cuatro o cinco años, decidió que eso era más dinero del que iba a necesitar en esta o cualquier otra vida y que prefería estar en una universidad, así que está de vuelta trabajando en pesquerías en UCSD.

May abogó firmemente por la inclusión del estudio de ecuaciones como las mencionadas anteriormente en cursos de matemáticas elementales. Su objetivo era enriquecer la intuición de los estudiantes, mostrándoles cómo la complejidad puede surgir de ecuaciones simples. Una razón adicional es que las ecuaciones no lineales, como las anteriores, son la regla, no la excepción fuera de la física. En su biografía de MacTutor⁸ se puede leer cómo se veía a sí mismo:

Las matemáticas no son en última instancia ni más ni menos que pensar muy claramente sobre algo. Me gustan los rompecabezas, así que soy un matemático. No soy el matemático de los matemáticos puros porque no me gustan los problemas abstractos y formales. Me gustan los trucos y los dispositivos. Soy esencialmente un matemático, pero en el sentido de que me gusta pensar en cosas complicadas, preguntarme cuáles son las posibles simplicidades ocultas en ellas y expresarlas en términos matemáticos y ver a dónde me llevan de manera verificable.

El comportamiento de la función logística $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, que se utiliza, como hemos dicho, para modelar el crecimiento de poblaciones, sería analizado posteriormente en detalle por Mitchell Feigenbaum. A medida que el parámetro de control r aumenta, el sistema pasa por una serie de bifurcaciones, duplicando su periodo en cada paso.

Recapitulando lo dicho anteriormente:

1. Para valores bajos de r , la población se estabiliza en un punto de equilibrio.
2. Al aumentar r a un cierto valor, el sistema se divide en un ciclo de dos puntos (oscilación), lo que significa que la población alterna entre dos valores.
3. Al aumentar r nuevamente, el ciclo se duplica a cuatro puntos.
4. Este proceso de duplicación de periodo continúa (8, 16, 32...) hasta que el sistema finalmente se vuelve caótico.

Feigenbaum no sólo describió este proceso, sino que descubrió una constante universal que rige el régimen al que ocurren estas bifurcaciones. En concreto, descubrió que la relación entre los valores de r en los que ocurren bifurcaciones sucesivas converge a un número

8. O'CONNOR y ROBERTSON: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/May_Robert/ (Consulta: octubre de 2025).

constante, ahora conocido como la constante de Feigenbaum $\delta \approx 4.66920160910299...$. Esta constante es universal en el sentido de que aparece en una amplia gama de sistemas dinámicos que entran en el caos a través de la duplicación de periodo, independientemente de la ecuación subyacente. Su hallazgo fue recompensado con el premio Wolf por “sus estudios pioneros que demuestran el carácter universal de los sistemas no lineales, que ha hecho posible el estudio sistemático del caos». Feigenbaum descubrió la constante numéricamente estudiando la aplicación logística en una calculadora, y su universalidad fue probada más tarde analíticamente.

Se ha encontrado en experimentos con:

- Líquidos: La transición a la turbulencia en la convección de Rayleigh-Bénard [Libchaber y Maurer, 1980].
- Electrónica: Circuitos electrónicos no lineales [Chua et al., 1986].
- Física de plasmas: Ciertos tipos de inestabilidades de plasma [Testa et al., 1982].

El descubrimiento de esta constante universal fue importante porque sugirió que existe un “lenguaje” matemático común que describe la transición al caos. La contribución de Feigenbaum mostró que, a pesar de la aparente complejidad y la imprevisibilidad del caos, subyacen reglas matemáticas universales.⁹

Alrededor de 1990, Edward Ott, Celso Grebogi y James Yorke (OGY) desarrollaron el llamado método del control del caos. Se trata de una técnica que permite estabilizar el comportamiento caótico de un sistema. Su principio fundamental es que, dentro de un atractor caótico, existen infinitas órbitas periódicas inestables que el sistema visita repetidamente. El método aprovecha esta característica para guiar la trayectoria del sistema hacia una de estas órbitas, manteniendo un comportamiento predecible. La técnica no busca eliminar el caos, sino controlarlo. En este caso, tiene importancia fundamental la propiedad de los sistemas caóticos de tener una familia densa de trayectorias periódicas. Cuando la trayectoria del sistema se acerca a la vecindad de una de estas órbitas, se aplica una pequeña y precisa perturbación a uno de los parámetros del sistema. Esta perturbación es lo suficientemente pequeña como para no alterar significativamente el sistema en un rango temporal acotado, pero suficiente para corregir su trayectoria y dirigirla hacia la órbita periódica. Al aplicar estas perturbaciones de manera recurrente, se logra que el sistema se acople a la órbita deseada y mantenga un comportamiento periódico y predecible. A diferencia de otros métodos de control que requieren grandes cambios de energía, el método OGY es eficiente y solo necesita ajustes mínimos, lo que, según los autores, lo hace aplicable en una amplia gama de campos, desde la física y la ingeniería hasta la medicina y las finanzas.

Los autores describen los fundamentos de su método en la introducción del artículo [OTT *et al.*, 1990, p. 1196]:

9. Sus trabajos principales son FEIGENBAUM [1978, 1983].

Se demuestra que es posible convertir un atractor caótico en un atractor periódico mediante la aplicación de pequeñas perturbaciones dependientes del tiempo. El método es aplicable a situaciones experimentales en las que no se dispone de un conocimiento analítico previo de la dinámica del sistema. A diferencia de la teoría de control tradicional, que intenta dirigir el estado de un sistema a un estado preciso, hay situaciones en las que solo tenemos influencia en un entorno caótico. La información necesaria para aplicar nuestro método es solo la posición aproximada de los puntos de seguridad. Esta información podría obtenerse del análisis de series temporales, lo que sugiere la aplicabilidad de este control a sistemas reales.

Hay que mencionar que James A. Yorke fue uno de los impulsores iniciales de la teoría del caos, dando a conocer el trabajo fundacional de Lorenz y contribuyendo él mismo con el muy influyente artículo [LI y YORKE, 1975].

Más contribuciones en esta dirección son debidas a Miguel A. F. Sanjuán. A diferencia del método OGY, que busca estabilizar una órbita periódica específica, su trabajo ha explorado el concepto de control parcial del caos para mantener al sistema dentro de una región caótica, sin forzarlo a una trayectoria periódica única. La investigación de Sanjuán, a menudo en colaboración con otros expertos como el propio Yorke (uno de los autores del método OGY) y Jesús M. Seoane,¹⁰ se centra en el control de sistemas caóticos transitorios. Este tipo de caos es aquel en el que el sistema se comporta de forma caótica solo por un tiempo limitado antes de asentarse en un comportamiento no caótico. Sanjuán ha desarrollado una técnica que utiliza la naturaleza caótica del sistema a su favor. Su método no intenta estabilizar una órbita periódica específica, sino que guía el sistema para que permanezca dentro de la región caótica. Esto es útil en situaciones donde la flexibilidad del caos es deseada, como en la dinámica de fluidos o el control del tráfico, ya que una pequeña perturbación permite manejar sistemas complejos de gran escala.

Para terminar esta sección, mencionemos que al desarrollo de la teoría del caos han contribuido muchas otras personas relevantes y en el trabajo se han citado sólo algunas de ellas, ya que pretender incluir a todas es imposible.

2.2. Aplicaciones en la ciencia

A continuación, mencionaremos algunas aplicaciones de la teoría del caos a otras ciencias, empezando por la medicina. Aunque los resultados matemáticos subyacentes son rigurosos, es importante resaltar que sus aplicaciones a otras ciencias constituyen un campo en evolución, donde los hallazgos no pueden considerarse definitivos y están permanente sujetos a debate y a interpretaciones alternativas. No obstante, estas investigaciones se desarrollan en centros de excelencia mundial, como la Universidad de Harvard, y algunos de sus resultados gozan de amplio reconocimiento —si bien no de unanimidad— dentro de la comunidad científica. Muchos de estos avances se inspiran en la visión filosófica y científica del premio Nobel de Química Ilya Prigogine (1977), quien conceptualizó la vida como un sistema dinámico, no lineal y lejos del equilibrio termodinámico. Esta perspectiva ha servido como marco

10. Véase CAPEÁNS *et al.* [2017] y CANTISAN *et al.* [2021].

conceptual para investigadores en áreas como la fisiología (por ejemplo, en el estudio de ritmos circadianos irregulares), la cardiología (análisis de arritmias cardíacas) y la neurociencia (modelado de redes de neuronas complejas), fomentando una comprensión más profunda de la complejidad en sistemas vivos.

Las aplicaciones de la teoría del caos en medicina parten de un hecho paradójico: los sistemas sanos no son perfectamente regulares, sino dinámicamente complejos. La pérdida de variabilidad suele ser un signo de enfermedad. En otras palabras, la salud no corresponde ni a un orden rígido ni a un desorden absoluto, sino a un equilibrio dinámico intermedio.

Un ejemplo claro es el latido cardíaco. El corazón sano no late con periodicidad exacta: muestra pequeñas variaciones en los intervalos entre pulsos y manifiesta una dinámica sensible a las condiciones iniciales, pero contenida dentro de límites. En cambio, en ciertos trastornos graves, como la insuficiencia cardíaca, esa variabilidad se reduce de manera drástica. El corazón pierde capacidad de adaptación y responde mal a cambios en la demanda de oxígeno o en la presión arterial. En términos dinámicos, su evolución se aproxima a un atractor simple, casi periódico, situado en las antípodas de la dinámica caótica. Lo opuesto ocurre en situaciones de desorden excesivo, como la fibrilación auricular: los intervalos entre latidos se vuelven extremadamente irregulares, el sistema se aleja de una estructura caótica determinista y se aproxima a una dinámica que combina componentes caóticos y aleatorios.

Así, un corazón sano presenta —según una activa línea de investigación representada por autores como Ary L. Goldberger, Alan Garfinkel y Leon Glass, entre muchos otros— una dinámica irregular pero organizada, adaptativa y estructurada. Como en otros sistemas biológicos, su buen funcionamiento depende de mantenerse en una ventana de complejidad situada entre el orden rígido y la aleatoriedad. Ary L. Goldberger (Universidad de Harvard) fue uno de los pioneros en el estudio de la naturaleza caótica del ritmo cardíaco saludable e investigó el papel de los mecanismos no lineales. Alan Garfinkel (Universidad de California, Los Ángeles) propuso que la fibrilación ventricular constituye también un ejemplo de caos determinista, aunque, en este caso, de un nivel de complejidad e incoherencia tal que el sistema pierde toda organización funcional global, y describió un mecanismo, experimentalmente verificado, para prevenirla. Leon Glass (Universidad McGill, Canadá) ha aplicado métodos matemáticos y físicos al estudio de la biología; su trabajo, que integra modelización, experimentos y análisis clínicos, ha sido decisivo para comprender alteraciones de los ritmos fisiológicos que, en su opinión, resultan de bifurcaciones y de caos determinista. Junto con Michael Mackey desarrolló ecuaciones diferenciales con retardo para modelar sistemas de control fisiológico, de las cuales surgió la ecuación de Mackey-Glass, un modelo con comportamiento caótico.¹¹ En Glass y Mackey [1988], dedicado a los “ritmos de la vida”, ambos autores exploran cómo estos ritmos se generan, se alteran y se organizan, con especial atención al ámbito cardíaco. Según sus investigaciones, los experimentos con células cardíacas aportan sólidas evidencias de este tipo de dinámica.

11. Véase MACKAY y GLASS [1977].

En el resumen de Weiss *et al.* [1994, p. 1355], los autores precisan la naturaleza del papel que atribuyen al caos en los sistemas biológicos:

El caos, en su sentido matemático, describe un comportamiento irregular que parece aleatorio, pero no lo es: reconocerlo implica que un conjunto de reglas precisas, y no el azar, rige la irregularidad del sistema. Por ello, si el sistema se comprende lo bastante bien, dicho comportamiento puede predecirse, eliminarse o controlarse.

En Skinner *et al.* [1990], los autores sostienen que la teoría del caos no solo ofrece nuevos métodos teóricos para entender la generación del latido y el origen de las arritmias, sino también para desarrollar tests biomédicos, algoritmos de predicción clínica, evaluar fármacos y fabricar dispositivos para la cardiología médica.

Así pues, los investigadores citados coinciden en que la adaptabilidad y la respuesta flexible de un corazón sano dependen de su sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que vincula su funcionamiento —y también ciertas patologías que lo afectan— con fenómenos estudiados por la teoría del caos. No obstante, dicho comportamiento es determinista, no aleatorio, y está gobernado por un orden subyacente descrito mediante ecuaciones matemáticas que le otorgan una estructura capaz de revelar patrones útiles para comprender y modelar procesos del mundo real.

Cabe señalar que otros autores, en particular Beata y Grzegorz Graff y colaboradores, han utilizado métodos matemáticos basados, igual que el caos, en la dinámica no lineal para analizar la complejidad de las señales de los electrocardiogramas y la variabilidad de la frecuencia cardíaca. En sus estudios llegan a conclusiones semejantes a las comentadas de que el funcionamiento del corazón refleja un equilibrio flexible entre el orden rígido y el desorden aleatorio [GRAFF *et al.*, 2015].

Es importante destacar que los resultados mencionados se inscriben en un campo interdisciplinario en desarrollo, lo que ha dado lugar a controversias y debates científicos. Algunos investigadores sostienen que la variabilidad cardíaca —las fluctuaciones en los intervalos entre latidos— podría ser el resultado de ruido estocástico (variaciones aleatorias) en lugar de caos determinista, cuestionando así la capacidad de los métodos no lineales para distinguir con claridad entre ambas posibilidades. Estas discusiones forman parte natural del progreso científico, especialmente en áreas innovadoras. Ary Goldberger y sus colegas han defendido activamente la perspectiva del caos determinista y de la dinámica no lineal, respaldando su enfoque con evidencia empírica, como el análisis detallado de series temporales cardíacas. En cualquier caso, consideramos necesaria la cautela y no dar por sentado que estamos ante un campo consolidado y definitivamente establecido.

Siempre dentro del ámbito de las ciencias médicas, diversos autores han explorado la aplicabilidad de la teoría del caos al estudio del sistema nervioso, dado que este exhibe dinámicas inherentemente complejas, no lineales y, en ocasiones, comportamientos aparentemente impredecibles. Estas características han motivado el empleo de herramientas propias de la dinámica caótica para el análisis y modelización de procesos neuronales. A

continuación, se presentan algunas de las principales líneas de investigación en este ámbito, siguiendo las perspectivas desarrolladas por los autores más representativos.

Modelado de dinámicas neuronales. Las herramientas provenientes de la teoría del caos permiten estudiar la actividad eléctrica de las redes de neuronas, como las descargas rítmicas en el cerebro. Por ejemplo, los patrones de electroencefalograma en enfermedades como la epilepsia parecen mostrar comportamientos altamente sensibles a las condiciones iniciales, donde pequeñas perturbaciones pueden desencadenar convulsiones. Este enfoque ha contribuido a comprender mejor la naturaleza de la excitabilidad neuronal y de los mecanismos que conducen a la pérdida de estabilidad funcional.

Sincronización y procesamiento de información. Las redes neuronales operan en regímenes dinámicos que transitan entre el orden y la complejidad extrema (a menudo en el denominado “borde del caos”). Algunos estudios sugieren que esta dinámica favorece la sincronización interneuronal, un aspecto crucial para diversas funciones cognitivas.

Patologías neurológicas. En trastornos como el Parkinson o la esquizofrenia, los patrones de actividad cerebral muestran alteraciones en su comportamiento dinámico. En el caso del Parkinson, por ejemplo, la rigidez motora se vincula con una reducción de la variabilidad típica de sistemas caóticos, lo que ha motivado el desarrollo de terapias como la estimulación cerebral profunda para restaurar patrones más naturales.

Algunos autores, entre los muchos que han trabajado en esta dirección, son los siguientes:

Walter J. Freeman (Universidad de California, Berkeley). Fue pionero en aplicar la teoría del caos y la dinámica no lineal a la actividad cerebral. Analizó la actividad oscilatoria de las cortezas sensoriales en animales para comprender los mecanismos de la percepción. Su modelo neurodinámico propone que el cerebro no procesa información de manera lineal, sino como un sistema caótico que genera significado a través de interacciones colectivas de poblaciones neuronales a nivel mesoscópico (columnas corticales con aproximadamente 10.000 neuronas). Este modelo fue empleado para estudiar los procesos perceptivos y cognitivos en animales y en humanos, así como para establecer algunos fundamentos en el desarrollo de la inteligencia artificial [FREEMAN, 2000].

Klaus Lehnertz, de la Universidad de Bonn, se ha dedicado, entre otros temas en el ámbito de la neurología, a la predicción de convulsiones epilépticas mediante métodos no lineales [LEHNERTZ, 2008]. Este es un tema fundamental, tanto en la investigación teórica como en la práctica clínica. En muchos casos, las crisis epilépticas surgen de manera inesperada, lo que representa uno de los aspectos más desconcertantes y desagradables de la epilepsia. Sus análisis, fundamentados en la teoría del caos, buscan caracterizar los estados normales y patológicos de la función cerebral, con un enfoque orientado a la práctica clínica en patologías como la mencionada.

Earl K. Miller, profesor de Neurociencia en el MIT, aunque no trabaja propiamente dentro del marco de la teoría del caos, ha estudiado el funcionamiento del cerebro en una región situada entre estabilidad y caos —es decir, “al borde del caos”— para procesar

información compleja de manera flexible sin caer en desorden incontrollable. Su trabajo se centra en mecanismos neuronales que permiten la adaptabilidad cognitiva, como la memoria de trabajo, la atención y la toma de decisiones, integrando conceptos de dinámica para explicar la estabilidad y la excitabilidad neural. Miller ha demostrado que muchas neuronas en la corteza prefrontal responden a múltiples estímulos y participan en diversas computaciones simultáneas. Esta capacidad permite al cerebro manejar la complejidad del mundo real, reclutando neuronas específicas para enfocar la información relevante. En una entrevista reciente,¹² explica cómo estos mecanismos mantienen el cerebro en un “filo de navaja” (knife’s edge) evitando tanto la rigidez como el desorden. Su laboratorio en el Picower Institute explora estos temas para desarrollar modelos del cerebro.

Es interesante también el trabajo de John H. Byrne, un investigador formado en el laboratorio del premio Nobel Eric Kandel, que en colaboración con otros colegas ha utilizado conceptos de la teoría del caos y dinámica no lineal en sus investigaciones sobre excitabilidad neuronal y procesamiento de información en el sistema nervioso [CANAVIER *et al.*, 1990].

En otro orden de cosas, es de señalar que, en el campo de la Inteligencia Artificial, las llamadas redes neuronales profundas juegan un importante papel y también presentan comportamientos no lineales complejos, donde pequeñas variaciones en los datos de entrada o en los parámetros pueden producir resultados muy distintos. Por ejemplo: una ligera modificación en un píxel puede cambiar completamente la clasificación de una red neuronal. Algunas redes neuronales recurrentes pueden evolucionar en el tiempo de forma análoga a sistemas dinámicos caóticos. En ellas se pueden observar fenómenos como atractores extraños, transiciones de fase entre orden y caos o caos controlado, que a veces se aprovecha para mejorar la exploración del espacio de estados. Existe actualmente una activa línea de investigación que estudia la aplicación de la teoría del caos a la Inteligencia Artificial, consultar, por ejemplo [LIU *et al.*, 2025].

Debe advertirse, no obstante, que persiste un debate acerca de la naturaleza genuinamente caótica de los patrones observados en la actividad neuronal. Se trata, en definitiva, de evaluar el grado de aproximación a la realidad clínica o computacional que ofrecen los modelos matemáticos basados en diversas técnicas del análisis no lineal y la teoría del caos. Como observamos para la cardiología, en numerosos casos, distinguir entre un comportamiento caótico y uno dominado por ruido estocástico constituye un desafío metodológico fundamental. Los análisis no lineales requieren registros experimentales de alta resolución y algoritmos robustos para evitar interpretaciones espurias. En consecuencia, aunque las aplicaciones de la teoría del caos en neurociencia son prometedoras, algunos de los resultados actuales deben considerarse preliminares, y el campo continúa en un estado activo de desarrollo y revisión conceptual.

12. TRAFTON, Anne [2024]. https://news.mit.edu/2024/study-reveals-how-anesthesia-drug-induces-unconscious-0715?utm_source=chatgpt.com

Mencionemos brevemente que la teoría del caos ha sido aplicada también en otras disciplinas, por ejemplo, en química, en particular en sistemas como reacciones oscilantes y dinámicas electroquímicas. Especial interés ha suscitado el estudio de la reacción de Belousov-Zhabotinski (BZ), que exhibe comportamiento caótico determinista a través de duplicación de período. Involucra compuestos como bromato, ácido malónico e iones de cerio en un medio ácido. Lo fascinante es que, en lugar de llegar a un equilibrio estable, la mezcla cambia de color de forma periódica (de incoloro a amarillo-anaranjado) debido a oscilaciones en las concentraciones de especies químicas. En la BZ, el caos surge cuando las oscilaciones químicas dejan de ser periódicas y se vuelven irregulares: bajo ciertas variaciones (por ejemplo, en un reactor de flujo continuo), las oscilaciones se vuelven aperiódicas, con patrones que parecen aleatorios, pero siguen ecuaciones deterministas. Esto se mide por fluctuaciones en el potencial electroquímico (vía ecuación de Nernst). El caos se observa en: 1) patrones espaciales, como ondas viajeras, espirales o laberintos que colisionan y se anulan, debido a la difusión y reacciones no lineales; y 2) series temporales. En reactores cerrados o de flujo las mediciones muestran atractores extraños (estructuras geométricas en el espacio de fases) y bifurcaciones (transiciones de orden a desorden). Este comportamiento fue demostrado experimentalmente en los años 70-80. La reacción sirve como prototipo para estudiar sistemas fuera del equilibrio termodinámico, donde emergen patrones complejos y autoorganización. Es visible a simple vista en una placa de Petri, formando ondas, espirales o patrones que recuerdan a estructuras biológicas, como latidos cardíacos.¹³

La teoría del caos ha influido también en la economía al modelar dinámicas no lineales, ciclos económicos impredecibles pero deterministas y comportamientos en mercados financieros, en particular la volatilidad, o la dinámica del crecimiento. Una referencia con abundante información es la colección de ensayos de GOODWIN [1990]. Es también interesante el enfoque de la teoría de fractales desarrollado por Mandelbrot y Hudson [2004], quienes analizan las fluctuaciones en los mercados. En el ámbito de la sociología, la teoría del caos se ha convertido en una herramienta útil para interpretar sistemas sociales complejos, no lineales y sensibles a condiciones iniciales, como estructuras sociales, eventos históricos y dinámicas grupales [KIEL y ELLIOTT, 1997].

2.3 Algunas implicaciones filosóficas

Las implicaciones filosóficas de la teoría del caos giran en torno a la dualidad entre determinismo e impredecibilidad, que cuestiona el punto de vista tradicional según el cual la predictibilidad era una consecuencia natural del determinismo. Además, el caos introduce no solo límites a la capacidad de predicción, sino también una forma de irreversibilidad práctica: aunque las ecuaciones son, en principio, reversibles, el conocimiento efectivo del pasado no lo es. En otras palabras: pequeñas incertidumbres en el presente hacen imposible “reconstruir” el pasado con precisión. Sin embargo, la existencia de estructuras como los atractores extraños

13. Una referencia importante es HUDSON y MANKIN [1981].

muestra que lo caótico no equivale a lo aleatorio, sino que revela un orden subyacente de nivel más profundo.

En el primer volumen del célebre curso de física de Richard Feynman [2010], el autor advierte sobre el riesgo de extraer conclusiones filosóficas a partir de teorías científicas y aplicarlas fuera de su contexto propio. Al referirse a la mecánica cuántica, Feynman señala cómo en ciertos círculos filosóficos se interpretó el principio de incertidumbre como una refutación de las ideas de determinismo y predictibilidad asociadas a la física clásica. Sin embargo, Feynman recuerda que la imposibilidad práctica de una predicción exacta ya estaba presente en la física clásica anterior a la cuántica, al depender los resultados de manera muy sensible de las condiciones iniciales. En este sentido, sus observaciones pueden leerse como una anticipación de lo que más tarde se conocería como teoría del caos.

En cualquier caso, muchas de las visiones clásicas —como el positivismo del Círculo de Viena, que sostenía que la ciencia debía buscar leyes universales, verificables y capaces de permitir predicciones exactas— quedan fuertemente cuestionadas. Ciertamente, se mantiene el rigor matemático, pero se reconoce el límite epistemológico. En filosofía práctica y ética, se ha usado como metáfora de la fragilidad de las decisiones humanas: pequeños actos pueden tener grandes consecuencias. Algunos autores han subrayado una posible interpretación fenomenológica, por ejemplo, en relación con la obra de Maurice Merleau-Ponty [1964]. Desde este punto de vista, el mundo no es caótico en sí mismo sino en relación con nuestras formas de acceso a él.

Quizá la visión más influyente sea la de Ilya Prigogine, un científico con inclinaciones filosóficas, que se situaba en la estela de Heráclito, Bergson y Alfred North Whitehead y que veía la sensibilidad a las condiciones iniciales no como un simple problema práctico de predicción, sino como un principio ontológico: el futuro no está prefigurado, sino que el sistema puede generar espontáneamente nuevas configuraciones. El sistema “elige” —por así decirlo— entre múltiples trayectorias posibles, y esa elección es creativa, no predecible. Según Prigogine, la inestabilidad introduce la posibilidad de la innovación. La naturaleza es creativa porque es inestable [PRIGOGINE, 1997]. Su colaboradora, la filósofa Isabelle Stengers [1995], enfatiza la dimensión epistemológica y cosmológica del caos; según ella, la sensibilidad a las condiciones iniciales introduce contingencia y singularidad en cada proceso.

Por otra parte, el biólogo teórico Stuart Kauffman (Santa Fe Institute) extiende esta idea al terreno biológico. Según él, los sistemas complejos (como los organismos o ecosistemas) funcionan en el borde del caos: un punto intermedio entre el orden rígido y el desorden total. En esa franja, pequeñas perturbaciones pueden desencadenar innovaciones evolutivas, nuevas formas de organización o comportamiento.

Kauffman interpreta lo anterior como una ley de creatividad natural: la vida prospera donde la sensibilidad al entorno permite experimentar sin desintegrarse [KAUFFMAN, 1993].

Para una amplia discusión filosófica sobre el caos puede consultarse la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*,¹⁴ que incluye una extensa bibliografía. Asimismo, véase el artículo de Madrid Casado [2010] para un tratamiento general de la problemática aquí discutida.

A la vista de lo anterior, no parece inapropiado en un contexto filosófico terminar este apartado con la siguiente reflexión de Richard Feynman [1999, p. 44]:

Verás, una cosa es que yo pueda vivir con la duda, la incertidumbre y el no saber. Creo que es mucho más interesante vivir sin saber que tener respuestas que podrían ser erróneas. Tengo respuestas aproximadas, creencias posibles y diferentes grados de certeza sobre distintas cosas, pero no estoy absolutamente seguro de nada y hay muchas cosas sobre las que no sé absolutamente nada, como si significa algo preguntar por qué estamos aquí... No tengo que conocer una respuesta. No me siento asustado por no saber las cosas, por estar perdido en un universo misterioso sin ningún propósito, que es como realmente es en la medida en que puedo ver. No me asusta.

3. CONCLUSIONES

El desarrollo de este artículo pone de relieve que la teoría del caos no constituye un mero apéndice de la ciencia moderna, sino un marco conceptual que redefine la intersección entre matemáticas, física, biología y filosofía. Desde los inicios de la mecánica newtoniana, con su aspiración a un determinismo absoluto, hasta los hallazgos de Poincaré sobre trayectorias homoclínicas transversales en el problema de los n cuerpos, se ha evidenciado cómo la búsqueda de estabilidad condujo al descubrimiento de inestabilidades estructurales inesperadas. Al revelar en 1890 la complejidad topológica de los sistemas dinámicos, Poincaré no solo corrigió un error en su memoria premiada, sino que inauguró una perspectiva en la que el caos emerge como complemento indispensable del orden. Los puntos homoclínicos identificados por Poincaré, posteriormente ampliados mediante la herradura de Smale y el atractor de Lorenz, demuestran que sistemas estrictamente deterministas pueden exhibir impredecibilidad sensible a las condiciones iniciales, sin perder la presencia de una estructura subyacente, como ilustran la constante de Feigenbaum y las bifurcaciones de duplicación de período en la ecuación logística de May.

Esta tensión entre estabilidad y caos trasciende la mecánica celeste y se extiende a disciplinas donde los sistemas son inherentemente más complejos. En biología, el modelo de May sobre dinámicas de poblaciones muestra que ecuaciones diferenciales o en diferencias relativamente simples pueden transitar de equilibrios estables a regímenes caóticos, ofreciendo predicciones a corto plazo mientras limitan la predictibilidad a largo plazo. En medicina, investigadores como Goldberger, Glass y Garfinkel han emprendido un camino, aún sin consolidar y abierto al debate, que entiende la salud como un equilibrio dinámico situado en el “borde del caos”, donde la variabilidad no lineal —evaluada mediante exponentes de Lyapunov o medidas de entropía— distingue la adaptabilidad funcional de la rigidez patológica o del desorden estocástico. Lo mismo sucede en neurociencia, donde Freeman y Lehnertz han aplicado métodos de análisis caótico para modelar la percepción y anticipar

14. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [2023], <https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/>

crisis epilépticas, mientras que en química la reacción de Belousov-Zhabotinski ejemplifica autoorganización en sistemas disipativos. De manera análoga, en economía y sociología, estudios de Goodwin y Kiel han empleado la teoría del caos para proponer modelos sobre las volatilidades financieras y dinámicas sociales, resaltando la pertinencia de estos principios en contextos de complejidad organizada.

No obstante, el alcance de la teoría del caos trasciende lo técnico para irrumpir en el ámbito filosófico, cuestionando el legado laplaciano y abriendo un horizonte de incertidumbre creativa. Como advertía Feynman, la duda no es un vacío, sino el suelo fértil de la curiosidad humana; el caos no refuta el determinismo, sino que lo matiza al revelar límites epistemológicos inherentes. Prigogine eleva la inestabilidad a principio ontológico: la naturaleza no es, según él, un reloj predecible, sino un proceso generativo donde bifurcaciones y atractores extraños forjan novedad espontánea. Stengers y Kauffman extienden esta idea al “borde del caos” como mecanismo de innovación evolutiva, donde sistemas complejos —vivos o sociales— prosperan en la franja entre rigidez y aleatoriedad.

Como complemento histórico a estas reflexiones, resultan especialmente valiosos los trabajos de Aubin y Dahan Dalmedico [2002], Holmes [2005, 2007], Lozi [2025] y Smale [1998].

Para concluir, consideramos apropiadas las palabras del físico español Antonio Fernández-Rañada [1994, p. 108]:

La predicción detallada para todo tiempo, a lo Laplace, se ve hoy imposible e incluso absurda. Sorprende que alguna vez se haya creído en ella. Tanto es así que el físico matemático inglés James Lighthill, presidente entonces de la Unión Internacional de Mecánica Pura y Aplicada, decía en un congreso de su organismo en 1986: Debemos hablar en nombre de la gran fraternidad de practicantes de la mecánica. Somos hoy muy conscientes de que el entusiasmo que animaba a nuestros predecesores les llevó a generalizaciones sobre la predecibilidad [...] que ahora sabemos que son falsas. Debemos presentar colectivamente excusas por haber inducido a error, propagando, a propósito del determinismo [...] ideas que, a partir de 1960, se han revelado incorrectas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece sinceramente a los dos revisores anónimos por sus valiosas correcciones, observaciones y sugerencias, que mejoraron significativamente este artículo.

BIBLIOGRAFÍA

- ASTAKHOV, Sergey; BURBANKS, Andrew; WIGGINS, Stephen y FARRELLY, David (2003) “Chaos-assisted capture of irregular moons”. *Nature*, 423, 264-267.
- AUBIN, David y DAHAN DALMEDICO, Amy (2002) “Writing the history of dynamical systems and chaos: *Longue durée* and revolution, disciplines and cultures”. *Historia Mathematica*, 29(3), 273-339. <https://doi.org/10.1006/hmat.2002.2351>

- BARGE, Héctor y SANJURJO, José M.R. (2020) "A Conley index study of the evolution of the Lorenz strange set". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 401, 132162. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132162>
- BARROW-GREEN, June (1997) *Poincaré and the Three Body Problem*. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society; London, London Mathematical Society.
- BIRMAN, Joan S. y WILLIAMS, Robert F. (1983a) "Knotted periodic orbits in dynamical systems, I: Lorenz's equations". *Topology*, 22, 47-82.
- BIRMAN, Joan S. y WILLIAMS, Robert F. (1983b) "Knotted periodic orbits in dynamical systems, II: Knot holders for fibered knots". *Contemporary Mathematics*, 20, 1-60.
- BIRKHOFF, George Davis (1935) "Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques". *Memoriae Pontificia Academiae Scientiarum Nove Lyncae*, 3(1), 85-216.
- BIRKHOFF, George Davis (1950) *Collected Mathematical papers*. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society.
- BIRKHOFF, George Davis (1966) *Dynamical Systems*. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society.
- CANAVIER, Carmen C.; CLARK, John W. y BYRNE, John H. (1990) "Routes to chaos in a model of a bursting neuron". *Biophysical Journal*, 57(6), 1245-1251. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(90\)82643-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(90)82643-6)
- CANTISÁN, Julia; SEOANAE, Jesús M. y SANJUÁN, Miguel A.F. (2021) "Transient dynamics of the Lorenz system with a parameter drift". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31, 2150029. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.11017>
- CAPEÁNS, Rubén; SABUCO, Juan; SANJUÁN, Miguel A.F. y YORKE, James A. (2017) "Partially controlling transient chaos in the Lorenz equations". *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 375, 2016021. <https://doi.org/10.1098/rsta.2016.0211>
- CARTWRIGHT, Mary L. y LITTLEWOOD, John E. (1945) "On Non-linear Differential Equations of the Second Order: I. The Equation $y'' = -k(1-y^2)y + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large". *Journal of the London Mathematical Society*, 3, 180-189.
- CHUA, Leon; KOMURO, Motomasa y MATSUMOTO, Tatsuya (1986) "The double scroll family". *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33, 1073-1118.
- CODDINGTON, Earl y LEVINSON, Norman (1955) *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill.
- DIACU, Florin y HOLMES, Philip (1996) *Celestial Encounters*. New Jersey, Princeton University Press.
- FEIGENBAUM, Mitchell (1978) "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations". *Journal of Statistical Physics*, 19, 25-52.
- FEIGENBAUM, Mitchell (1983) "Universal behavior in nonlinear systems". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7, 16-39.
- FERNÁNDEZ-RAÑADA, Antonio (1994) *Los científicos y Dios*. Madrid, Editorial Trotta.
- FEYNMAN, Richard (1999) *The Pleasure of Finding Things Out*. Cambridge, MA, Basic Books.
- FEYNMAN, Richard; LEIGHTON, Robert y SANDS, Matthew (2010) *The Feynman Lectures on Physics*. California Institute of Technology.
- FREEMAN, Walter (2000) *Neurodynamics: An Exploration in Mesoscopic Brain Dynamics*. London, Springer Science & Business Media.
- GIRALDO, Antonio; MORÓN, Manuel A.; RUIZ DEL PORTAL, Francisco y SANJURJO, José M.R. (2005) "Shape of Global attractors in Topological Spaces". *Nonlinear Analysis*, 60, 837-847. <https://doi.org/10.1016/j.na.2004.03.036>

- GLASS, Leon y MACKEY, Michael C. (1988) *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. New Jersey, Princeton University Press.
- GOODWIN, Richard (1990) *Chaotic Economic Dynamics*. Oxford, Clarendon Press.
- GRAFF, Beata; GRAFF, Grzegorz; MAKOWIEC, Danuta; KACZKOWSKA, Agnieszka; WEJER, Dorota; BUDREJKO, Szymon; KOZŁOWSKI, Dariusz y NARKIEWIC, Krzysztof (2015) "Entropy Measures in the Assessment of Heart Rate Variability in Patients with Cardiodepressive Vasovagal Syncope". *Entropy*, 17, 1007-1022. <https://doi.org/10.3390/e17031007>
- GRAY, Jeremy (1992) "Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system". En: P. M. Harman y E. E. Shapiro (eds.) *An investigation of difficult things. Essays on Newton and the History of Exact Sciences*. Cambridge, Cambridge University Press, 503-524.
- HAAKE, Fritz; GNUTZMANN, Sven y KUS, Marek (2018) *Quantum Signatures of Chaos*. Berlín, Heidelberg, Springer.
- HOLMES, Philip (2005) "Ninety plus thirty years of nonlinear dynamics: Less is more and more is different". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15, 2703-2716.
- HOLMES, Philip (2007) "A short history of dynamical systems theory: 1885-2007". En: *History of Mathematics*, vol. 1. UNESCO-EOLSS.
- HUDSON, J.L. y MANKIN, J.C. (1981) "Chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction". *Journal of Chemical Physics*, 74, 6171-6177.
- KAUFFMAN, Stuart (1993) *The origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. Oxford University Press.
- KIEL, L. Douglas y ELLIOTT, Euel (1997) *Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications*. Ann Arbor, The University of Michigan Press.
- KOVALEVSKAYA, Sofya (1978) *A Russian Childhood*. New York, Springer Science+Business Media.
- KRISTIANSEN, K. Uldall y ORTEGA, Rafael (2024) "Circularization in the damped Kepler problem". *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, 2, 1411-1441.
- LAPLACE, Pierre-Simon (1799-1825) *Traité de mécanique céleste*. 5 vols. París, Duprat, Courcier et Bachelier.
- LAPLACE, Pierre-Simon (1951) *A Philosophical Essay on Probabilities*. Dover Publications.
- LEE, Ernestine; ASTAKHOV, Sergey y FARRELLY, David (2007) "Production of trans-Neptunian binaries through chaos-assisted capture". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 379, 229-246. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11930.x>
- LEHNERTZ, Klaus (2008) "Epilepsy and nonlinear dynamics". *Journal of Biological Physics*, 34(3-4), 253-266. <https://doi.org/10.1007/s10867-008-9090-3>
- LIBCHABER, A. y MAURER, J. (1980) "A Rayleigh-Bénard experiment: Helium in a small box". *Journal de Physique*, 41, C3-51-C3-56.
- LI, Tien-Yien y YORKE, James A. (1975) "Period Three Implies Chaos". *The American Mathematical Monthly*, 82, 985-992.
- LIU, Shuhong; AKASHI, Nozomi; QINGYAO, Huang; KUNIYOSHI, Yasuo y NAKAJIMA, Kohei (2025) "Exploiting chaotic dynamics as deep neural networks". *Physical Review Research*, 7, 033031. <https://doi.org/10.1103/l8dq-mphg>
- LORENZ, Edward N. (1963) "Deterministic Nonperiodic Flow". *Journal for the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.
- LORENZ, Edward N. (1993) *The essence of chaos*. Seattle, University of Washington Press.
- LOZI, René (2025) "Standing on the Shoulders of Galileo, Newton, and Poincaré: A Brief Reasoned History of the Chaotic Dynamical Systems and the People Who Shaped Them". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 35, 2540002. <https://doi.org/10.1142/S0218127425400024>

- MACKEY, Michael C. y GLASS, Leon (1977) "Oscillation and chaos in physiological control systems". *Science*, 197, 287-289.
- MADRID CASADO, Carlos (2010) "Historia de la Teoría del Caos contada para escépticos. Cuestiones de génesis y estructura". *Encuentros Multidisciplinares*, 34, 16-31.
- MANDELBROT, Benoit y HUDSON, Richard (2004) *A Fractal View of Financial Turbulence*. London, Profile Books.
- MAY, Robert M. (1975) "Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles and chaos". *Journal of Theoretical Biology*, 51, 511-524.
- MAY, Robert M. (1976) "Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics". *Nature*, 26(5560), 457, 459-467.
- MCGEHEE, Richard (1974) "Triple collision in the collinear three-body problem". *Inventiones Mathematicae* 27, 191-227.
- MERLEAU-PONTY, Maurice (1964) *Le Visible et L'Invisible*. París, Gallimard.
- MISCHAIKOW, Konstantin y MROZEK, Marian (1995) "Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32, 66-72.
- MROWKA, T. (1985) "A short proof of the Birkhoff-Smale theorem". *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93, 377-378.
- NEMYTSKII, V.V. y STEPANOV, V.V. (1960) *Qualitative Theory of Differential Equations*. New Jersey, Princeton University Press.
- NEWTON, Isaac (1687) *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londres, Jussu Societatis Regiae.
- OTT, Edward; GREBOGI, Celso y YORKE, James A. (1990) "Controlling Chaos". *Physical Review Letters*, 64, 1196-1199.
- PANG, Bo; MASDEMONT, Josep J. y QIAO, Dong (2025) "Temporary capture about the Moon involving Sun-Earth libration point dynamics". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 147, 108792. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2025.108792>
- POINCARÉ, Henri (1890) "Sur le problème des trois corps et les equations de la dynamique". *Acta Mathematica*, 13, 1890.
- POINCARÉ, Henri (1892-1899) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. París, Gauthier-Villars et Fils.
- PRIGOGINE, Ilya (1997) *The End of Certainty: Time, Chaos and the New Laws of Nature*. New York, The Free Press.
- RUELLE, David y TAKENS, Floris (1971) "On the Nature of Turbulence". *Communications in Mathematical Physics*, 20, 167-192.
- SÁNCHEZ-GABITES, Jaime (2011) "How strange can an attractor for a dynamical system in a 3-dimensional manifold look?". *Nonlinear Analysis*, 74, 6162-6185.
- SANJURJO, José M.R. (2003) "Morse equations and unstable manifolds of isolated invariant sets". *Nonlinearity*, 16, 1435-1448.
- SANJURJO, José M.R. (2007) "Global Topological Properties of the Hopf Bifurcation". *Journal of Differential Equations*, 243, 238-255.
- SKINNER, James E.; GOLDBERGER, Ary L.; MAYER-KRESS, Gottfried e IDEKER, Raymond E. (1990) "Chaos in the Heart: Implications for Clinical Cardiology". *Nature*, 8, 1018-1024.
- SMALE, Stephen (1967) "Differentiable dynamical systems". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, 747-817.
- SMALE, Stephen (1998) "Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio". *Mathematical Intelligencer*, 20, 39-44.
- STENGERS, Isabelle (1993) *L'invention des sciences modernes*. París, Flammarion.

- SUNDMAN, Karl (1912) "Mémoire sur le problème des trois corps". *Acta Mathematica*, 36, 105-179.
- TESTA, James; PÉREZ, José y JEFFRIES, Carson (1982) "Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator". *Physical Review Letters*, 48, 714-717. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.714>
- TUCKER, Warwick (2002) "A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem". *Foundations of Computational Mathematics*, 2(1), 53-117.
- TURNBULL, H.W. (1960) *The Correspondence of Isaac Newton*, Vol. II. Cambridge University Press.
- VIANA, Marcelo (2000) "What's new on Lorenz strange attractors?". *The Mathematical Intelligencer*, 22, 6-19.
- WEISS, James; GARFINKEL, Alan; SPANO, Mark L. y DITTO, William (1994) "Chaos and chaos control in biology". *The Journal of Clinical Investigation*, 93, 1355-1360.